ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Д. Т. Багдасарян

Классы мероморфных функций в многосвязной области и их параметрическое представление

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 16/X 1978)

Следуя работе М. М. Джрбашяна [1], условимся говорить, что неотрицательная и непрерывная на $[0,1)$ функция $\omega(x)\in\Omega$, если

$$1)\ \omega(0)=1\quad \int_0^1\omega(x)dx<+\infty; \tag{1}$$

$$2)\ \int_r^1\omega(x)dx>0\quad 0\leq r<1.$$

Далее, условимся обозначать через Ω^* подмножество функций $\omega(x)$ из Ω, удовлетворяющих в точке $x=0$ условию Липшица, т. е.

$$|\omega(x)-1|\leq C_\omega(\delta)x\quad (0\leq x<\delta<1) \tag{2}$$

На соответствующих классах допустимых функций $\varphi(r)$, $r\in(0,1)$ оператор $L^{(\omega)}[\varphi(r)]$ определяется таким образом:

$$L^{(\omega)}[\varphi(r)]=-\frac{d}{dr}\left\{r\int_0^1\varphi(\tau r)dp(\tau)\right\},\quad r\in(0,1) \tag{3}$$

где непрерывная на $[0,1]$ функция $p(\tau)$ имеет вид

$$p(0)=1\quad p(\tau)=\tau\int_\tau^1\frac{\omega(x)}{x^2}dx\quad \tau\in(0,1] \tag{4}$$

с оператором $L^{(\omega)}$ ассоциируются функции

$$W_\omega(z,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S(e^{-i\theta}z,\omega)L^{(\omega)}\left\{\log\left|1-\frac{e^{i\theta}}{\zeta}\right|\right\}d\theta \tag{5}$$

$$B_\omega(z,z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp[-W_\omega(z,z_k)]\quad (0<|z|<1,\ 0<|z_k|\leq 1), \tag{6}$$

где

$$S(z,\omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty} z^k\left\{k\int_0^1 x^{k-1}\omega(x)dx\right\}^{-1}. \tag{7}$$

Пусть $F(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ соответственно последовательности ее нулей и полюсов, пронумерованных по возрастанию их модулей.

Следующие результаты доказаны в работе М. М. Джрбашяна ([1] стр. 559—561).

Теорема (А). *Пусть $\omega(x)$ — произвольная функция из класса Ω^*. Тогда 1° функция*

$$L^{(\omega)}\{\log|F(\rho e^{i\varphi})|\} \quad (0\leq\rho<1,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi) \tag{8}$$

определена в круге $|z|<1$ кроме, быть может, множества точек

$$e(a_\mu, b_\nu)=\{\bigcup_{0<|a_\mu|<1} e\,|z/|a_\mu|\leq|z|<1,\ \arg z=\arg a_\mu\}\}\cup\{\bigcup_{0<|b_\nu|<1} e\,|z/|b_\nu|<|z|<1,\ \arg z=$$

$$=\arg b_\nu\}\}. \tag{9}$$

2°. *Для любого $\rho(0<\rho<1)$*

$$L^{(\omega)}\{\log|F(\rho e^{i\varphi})|\}\in L(0,2\pi).$$

3°. *Для любой функции $\omega(x)\in\Omega^*$ и для любого $\rho(0<\rho<1)$ справедлива следующая формула (с точностью до слагаемого вида $2\pi im$, где m — целое):*

$$\log F(z)=i\arg c_\lambda+\lambda K\omega+\lambda\log\frac{z}{\rho}+\sum_{0<|a_\mu|<\rho}\log A_\omega\left(\frac{z}{\rho},\frac{a_\mu}{\rho}\right)-\sum_{0<|b_\nu|<\rho}\log A_\omega\left(\frac{z}{\rho},\frac{b_\nu}{\rho}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho},\omega\right)L^{(\omega)}\left\{\log|F(\rho e^{i\theta})|\right\}d\theta \quad (|z|<\rho)$$

4°. *При тех же предположениях справедлива также формула*

$$\log|F(re^{i\varphi})|=\sum_{0<|a_\mu^*|<\rho}\log\left|A_\omega\left(\frac{r}{\rho}e^{i\theta},\frac{a_\mu^*}{\rho}\right)\right|-\sum_{0<|b_\nu^*|<\rho}\log\left|A_\omega\left(\frac{r}{\rho}e^{i\varphi},\frac{b_\nu^*}{\rho}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left(\varphi-\theta,\frac{r}{\rho},\omega\right)L^{(\omega)}\left\{\log|F(\rho e^{i\theta})|\right\}d\theta. \tag{10}$$

где

$$P(\varphi,r,\omega)=\mathrm{Re}\,S(re^{i\varphi},\omega),$$

а $\{a_\mu^*\}$ и $\{b_\nu^*\}$ — это вновь пронумерованные в том же порядке нули и полюсы функции $F(z)$ с включением нуля либо полюса в точке $z=0$, c_λ — первый не равный нулю коэффициент в ряде Лорана ф-ии $F(z)$ в окрестности точки $z=0$

Далее с каждой функцией $\omega(x)\in\Omega$ или $\omega(x)\in\Omega^*$ ассоциируется класс $N\{\omega\}$ или $N^*\{\omega\}$, для которых

$$\sup_{0<r<1}\{T_\omega(r, F)\} < +\infty, \tag{11}$$

где

$$T_\omega(\rho, F) \equiv m_\omega(\rho, F) + N_\omega(\rho, F);$$

$$N_\omega(\rho, F) \equiv N_\omega(\rho, \infty) = \int_0^\rho \frac{n(t, \infty) - n(0, \infty)}{t}\,\omega\left(\frac{t}{\rho}\right)dt + n(0, \infty)\,|\log\rho - K_\omega|; \tag{12}$$

$$m_\omega(\rho, F) \equiv m_\omega(\rho, \infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_+^{(\omega)}\{\log|F(\rho e^{i\theta})|\}d\theta,$$

а $n(t, \infty)$ – количество полюсов функции $F(z)$ в круге $|z| \leq t$, $L_+^{(\omega)} = \max\{L^{(\omega)}, 0\}$

$$K_\omega = \int_0^1 \frac{1 - \omega(x)}{x}dx. \tag{12'}$$

Следующая теорема (Б) доказана в работе (стр. 583—585).

Теорема (Б). *Класс $N^*\{\omega\}$ совпадает с множеством функций, которые в круге $|z| < 1$ допускают представление вида*

$$F(z) = e^{i\gamma + \lambda K_\omega} z^\lambda \frac{B_\omega(z, a_\nu)}{B_\omega(z, b_\nu)} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\theta}z, \omega)d\psi(\theta)\right\}, \tag{13}$$

где $\psi(\theta)$—вещественная функция на $[0, 2\pi]$ с конечным полным изменением, $\lambda \leq 0$—любое целое число, γ—вещественное число и наконец K_ω определяется формулой (12').

В настоящей работе получен аналог теоремы (A) М. М. Джрбашяна для функций, мероморфных в многосвязной области $G((\alpha_0 R_0)(\alpha_1 R_1), \ldots, (\alpha_m, R_m))$, граница которой состоит из $(m+1)$-окружностей. Далее по аналогии (^{1}) для тех же функций определены $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m$-характеристическая функция $T_{\omega_0, \ldots, \omega_n}(\rho_0, \ldots, \rho_m, F)$ и класс функций $N\{\omega_0, \ldots, \omega_m, G\}$ и получено параметрическое представление этого класса.

Пусть $G = G((z_0, R_0), (\alpha_1, R_1), \ldots, (\alpha_m, R_m))(m+1)$—связная область, граница которой состоит из $(m+1)$ окружностей:

$$\Gamma(z_0 R_0): \{z / |z - z_0| = R_0\},\ \Gamma_{k=1,\ldots,m}(\alpha_k, R_k): \{z / |z - \alpha_k| = R_k\}\ |z_0 - \alpha_k| < R_0, \tag{1,1}$$

где числа R_k, $k = 1, \ldots, m$ выбраны так, что

$$\Gamma(z_0 R_0) \bigcap_i \Gamma(\alpha_i R_i) = \varnothing \quad \Gamma(\alpha_i, R_i) \bigcap_{i \neq j} \Gamma(\alpha_j R_j) = \varnothing; \tag{1,2}$$

обозначим

$$G(z_0, R_0): \{z / |z - z_0| < R_0\},\ G(\alpha_k, R_k): \{z / |z - \alpha_k| > R_k\}. \tag{1,3}$$

Тогда

$$G((z_0 R_0), (a_1, R_1), \ldots, (a_m, R_m)) = G(z_0 R_0) \bigcap_{k=1}^{m} G(a_k, R_k); \qquad (1,4)$$

постоянные числа $r_k > R_k$ $(k=1,\ldots,m)$ выберем так, чтобы выполнялись условия (1,1) и (1,2) при $R_k \equiv r_k$ и чтобы функция $F(z)$ не имела на множестве $\bigcup_{k=1}^{m} \Gamma(a_k, r_k)$ нуля и полюса.

Нули и полюса функции $F(z)$, которые лежат в полуоткрытом кольце $R_k \leqslant |z-a_k| < r_k$, обозначим через $a_\mu^{(k)}$, $b_\nu^{(k)}$, нумерация которых сделана следующим образом

$$|a_1^{(k)} - a_k| \geqslant |a_2^{(k)} - a_k| \geqslant \ldots; \ |b_1^{(k)} - a_k| \geqslant |b_2^{(k)} - a_k| \geqslant \ldots, \lim_{\mu \to +\infty} |a_\mu^{(k)} - a_k| =$$

$$= \lim_{\nu \to +\infty} |b_\nu^{(k)} - a_k| = R_k. \qquad (1,5)$$

А остальные нули и полюса обозначим соответственно $a_\mu^{(0)}$, $b_\nu^{(0)}$, нумерация которых сделана по порядку возрастания расстояния до точки z_0, причем

$$\lim_{\mu \to +\infty} |a_\mu^{(0)} - z_0| = \lim_{\nu \to +\infty} |b_\nu^{(0)} - z_0| = R_0, \qquad (1,5')$$

тогда (см. ([2] стр. 388—393) и ([3] стр. 13—23)) существуют функции $F_0(z), F_1(z), \ldots, F_m(z)$ такие, что

1) $F_0(z)$ мероморфна в $G(z_0, R_0)$, $F_k(z)$ $k=1,\ldots,m$ мероморфны в области $G(a_k, R_k)$;

2) нули и полюса $F_k(z)$ $k=0,\ldots m$ совпадают с $a_\mu^{(k)}, b_\nu^{(k)}$;

3) $F_k(\infty)=1$ $k=1, 2, \ldots, m$ $\qquad (1,6)$

и имеет место следующее разложение:

$$F(z) = F_0(z) \cdot F_1(z) \ldots F_m(z). \qquad (1,7)$$

Обозначим

$$F_0^*(w) = F_0(z_0 + R_0 w) = F_0(z), \ F_k^*(w) = F_k\left(a_k + \frac{R_k}{w}\right) = F_k(z), \qquad (1,8)$$

далее обозначим

$$e_k(\zeta) = e_k \{z / R_k < |z-a_k| \leqslant |\zeta - a_k|, \ \arg(z-a_k) = \arg(\zeta - a_k)\} \ e_k\{a_\mu^{(k)}, b_\nu^{(k)}\} =$$

$$= \{\bigcup_{R_k < |a_\mu^{(k)} - a_k|} e_k(a_\mu^{(k)})\} \cup \{\bigcup_{R_k < |b_\nu^{(k)} - a_k|} e_k(b_\nu^{(k)})\}; \qquad (1,9)$$

$$e_0(\zeta) = e_0 \{z / |\zeta - z_0| \leqslant |z-z_0| < R_0, \arg(z-z_0) = \arg(\zeta - z_0)\}, \ e_0(a_\mu^{(0)}, b_\nu^{(0)}) =$$

$$= \{\bigcup_{0 < |a_\mu^{(0)} - z_0| < R_0} e_0(a_\mu^{(0)})\} \cup \{\bigcup_{0 < |b_\nu^{(0)} - z_0| < R_0} e_0(b_\nu^{(0)})\}. \qquad (1.10)$$

далее из (1.7) с точностью до слагаемого $2\pi i m$ будем иметь

$$\log F(z) = \log F_0(z) + \log F_1(z) + \ldots + \log F_m(z)$$

$$z \in G((z_0, R_0), (a_1 R_1) \ldots, (a_m, R_m)). \qquad (1,11)$$

Напишем теорему (А) для функций $F_0^*(w)$ и $F_k^*(w)$ $k=1,\dots,m$ (см. (1,8) и (1,6)) и переходим к переменному z, затем, подставляя значение $\log F_k(z)$ в (1.11), получим:

Теорема 1.1. *Пусть* $\omega_0(x)\in\Omega^*$, $\omega_k(x)\in\Omega$ $k=1,2,\dots,m$, *тогда* 1° *функции*

$$L_1^{(\omega_0)}\{F_0(z)\}=L^{(\omega_0)}\{\log|F_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})|\},\ L_1^{(\omega_k)}\{F_k(z)\}=$$
$$=L^{(\omega_k)}\left\{\log\left|F_k\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)\right|\right\}$$

определены соответственно в $G(z_0, R_0)$ *и* $G(\alpha_k, R_k)$, *кроме, может быть, множества точек* $e_0\{a_\nu^{(0)}, b_\nu^{(0)}\}$ *и* $e_k\{a_\nu^{(k)}, b_\nu^{(k)}\}$.

2°.

$$L^{(\omega_0)}\{\log|F_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})|\},\ L^{(\omega_k)}\left\{\log\left|F_k\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)\right|\right\}\in L\,(0,2\pi).$$

3°. *Для произвольных* $\rho_k(0<\rho_k<1)$ $k=0,1,\dots,m$, $z\in G\,((z_0, R_0)\times$

$$\times\left(\alpha_1,\frac{R_1}{\rho_1}\right),\dots,\left(\alpha_m,\frac{R_m}{\rho_m}\right)).$$

$$\log F(z)=i\arg_k+i.k_m+i.\log\frac{z-z_0}{R_0\rho_0}+\sum_{0<|a_\nu^{(0)}-z_0|<R_0\rho_0}\log A_\omega\left(\frac{z-z_0}{R_0\rho_0},\frac{a_\nu^{(0)}-z_0}{R_0\rho_0}\right)-$$

$$-\sum_{0<|b_\nu^{(0)}-z_0|<R_0\rho_0}\log A_\omega\left(\frac{z-z_0}{R_0\rho_0},\frac{b_\nu^{(0)}-z_0}{R_0\rho_0}\right)+1/2\pi\int_0^{2\pi}S\left(e^{i\theta}\frac{z-z_0}{R_0\rho_0},\omega_0\right)L^{(\omega_0)}\times$$

$$\times\left\{\log|F_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})|\right\}d\theta+\sum_{k=1}^{m}\sum_{R_k/\rho_k<|a_\nu^{(k)}-\alpha_k|<+\infty}\log\left(\frac{R_k}{\rho_k(z-\alpha_k)},\frac{R_k}{\rho_k(a_\nu^{(k)}-\alpha_k)}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{R_k/\rho_k<|b_\nu^{(k)}-\alpha_k|<+\infty}\log A_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k(z-\alpha_k)},\frac{R_k}{\rho_k(b_\nu^{(k)}-\alpha_k)}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(e^{-i\theta}\frac{R_k}{\rho_k(z-\alpha_k)},\omega_k\right)L^{(\omega_k)}\left\{\log\left|F_k\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_ke^{i\theta}}\right)\right|\right\}d\theta. \qquad (1.12)$$

Если в (1.12) *отделим действительные части, то получим:*

$$\log|F(z)|=\sum_{0<|a_\nu^{(0)}-z_0|<R_0\rho_0}\log\left|A_\omega\left(\frac{z-z_0}{R_0\rho_0},\frac{a_\nu^{(0)}-z_0}{R_0\rho_0}\right)\right|-$$

$$-\sum_{0<|b_\nu^{(0)}-z_0|<R_0\rho_0}\log\left|A_\omega\left(\frac{z-z_0}{R_0\rho_0},\frac{b_\nu^{(0)}-z_0}{R_0\rho_0}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left|-\theta-\arg(z-z_0),\frac{|z-z_0|}{R_0\rho_0},\omega_0\right|L^{(\omega_0)}\left\{\log|F_0(z_0+R_0\rho_0e^{i\theta})|\right\}d\theta+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{R_k/\rho_k\leq|a_\mu^{(k)}-\alpha_k|<+\infty}\log\left|A_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k(z_k-a_k)},\frac{R_k}{\rho_k(a_\mu^{(k)}-\alpha_k)}\right)\right|-$$

$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{R_k/\rho_k\leq|b_\nu^{(k)}-\alpha_k|<+\infty}\log\left|A_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k(z-\alpha_k)},\frac{R_k}{\rho_k(b_\nu^{(k)}-\alpha_k)}\right)\right|+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P\left|-\theta-\arg(z-\alpha_k),\frac{R_k}{\rho_k|z-\alpha_k|},\omega_k\right|L^{(\omega_k)}\left\{\log\left|F_k\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta}}\right)\right|\right\}d\theta,$$

где $\{a_{\mu^*}^{(0)}\}$ и $\{b_{\nu^*}^{(0)}\}$—это вновь пронумерованные в том же порядке нули и полюсы функции $F_0(z)$ с включением $z=z_0$, если она ноль, либо полюс, а $c_\lambda(z-z_0)^\lambda$—первый член в ряде Лорана функции $F_0(z)$ в окрестности точки $z=z_0$.

Пусть $F_k(z)$ мероморфна в области $G(\alpha_k, R_k)$. Обозначим через $n(t, G_k, \infty)$ число полюсов функции $F_k(z)$ в области $|z-\alpha_k|\geq t$.

Обозначим

$$N_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, \infty\right)\equiv N_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k\right)=$$

$$=\int_{R_k/\rho_k}^{\infty}\frac{n(t,G_k,\infty)-n(\infty,G_k,\infty)}{t}\,\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k t}\right)dt-n(\infty,G_k,\infty)\left\{\log\frac{R_k}{\rho_k}+K_\omega\right\}, \quad (2.1)$$

$$m_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, \infty\right)\equiv m_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}L_+^{(\omega)}\left\{\log\left|F_k\left(\alpha_k+\frac{R_k}{\rho_k e^{i\theta}}\right)\right|\right\}d\theta \quad (2.2)$$

следующую функцию:

$$T_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k\right)\equiv m_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k\right)+N_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k\right). \quad (2.3)$$

Будем называть ω характеристической функцией М. М. Джрбашяна мероморфной функции $F_k(z)$ в области $G(\alpha_k, R_k)$.

Обозначим через $N\{\omega, G_k\}$ или $N^*\{\omega, G_k\}$ класс мероморфных функций в области $G(\alpha_k, R_k)$, которые для функций $\omega(x)\in\Omega$ или $\omega(x)\in\Omega^*$ удовлетворяют условию

$$T_\omega(G_k, F_k)\equiv\sup_{0<\rho_k<1}\left|T_\omega\left(\frac{R_k}{\rho_k}, G_k, F_k\right)\right|<+\infty. \quad (2,4)$$

Аналогичным образом, если функция $F_0(z)$ мероморфна в области $G(z_0, R_0)$, то обозначим через $n(t, G_0, \infty)$ число полюсов функции $F_0(z)$ в круге $|z-z_0|\leq t$

$$N_\omega(R_0\rho_0, G_0, \infty)=N_\omega(R_0\rho_0, G_0, F_0)=\int_0^{R_0\rho_0}\frac{n(t, G_0,\infty)-n(0, G_0,\infty)}{t}\times$$

$$\times \omega\left(\frac{t}{R_0\rho_0}\right)dt + n(0, G_0, \infty)\{\log R_0\rho_0 - K_\omega\}; \qquad (2,1')$$

$$m_\omega(R_0\rho_0, G_0, \infty) = m_\omega(R_0\rho_0, G_0, F) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_+^{(\omega)}\{\log|F_0(z_0 + R_0\rho_0 e^{i\theta})|\}d\theta \quad (2,2')$$

$$T_\omega(R_0\rho_0, G_0, F_0) = m_\omega(R_0\rho_0, G_0, F_0) + N_\omega(R_0\rho_0, G_0, F_0) \quad (0 < \rho_0 < 1). \qquad (2,3')$$

Класс функций $N\{\omega, G_0\}$ или $N^*(\omega, G_0)$ М. М. Джрбашяна для мероморфных в $G(z_0, R_0)$ функций совпадает с классом функций, для которых

$$T_\omega(F_0, G_0) \equiv \sup_{0<\rho_0<1}\{T_\omega(R_0\rho_0, G_0, F_0)\} < +\infty. \qquad (2,4')$$

Лемма 2.1'. *Пусть функции $F_k(z)$ и $F_0(z)$ мероморфны соответственно в областях $G(\alpha_k, R_k)$ и $G(z_0, R_0)$,* а $\omega_k(x) \in \Omega^*$ $(k=0, 1, \ldots, m)$. *Тогда*

$$T_{\omega_i}\left(\frac{R_i}{s_i}, G_i, F_i\right) = T_{\omega_i}(\rho_i, F_i^*) - n(0, \infty)\log R_i \qquad i \neq 0 \quad (2.5)$$

$$T_{\omega_0}(R_0, \rho_0, G_0, F_0) = T_{\omega_0}(\rho_0, F_0^*) + n(0, 0)\log R_0, \qquad (2.5')$$

где

$$F_i^*(w) = F_i\left(\alpha_i + \frac{R_i}{w}\right) \quad i \neq 0, \quad F_0^*(w) = F_0(z_0 + R_0 w),$$

а $T_{\omega_i}(\rho_i, F_i^*)$ $(i=0, \ldots, m)$ ω—характеристические функции М. М. Джрбашяна для функции $F_i^*(w)$ в единичном круге $|w| < 1$.
Доказательство следует из соответствующих определений.

Пусть функция $F(z)$ мероморфна в $(m+1)$—связной области $G((z_0, R_0)(\alpha_1, R_1), \ldots, (\alpha_m, R_m))$, а функции $F_0(z), F_1(z), \ldots, F_m(z)$ его O-разложение (см. ([2]) и соотношения (1.6), (1.7)); пусть далее $\omega_0(x) \in \Omega^*$, $\omega_k(x) \in \Omega$ $(k=1, 2, \ldots, m)$, следующую функцию

$$T_{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m}(\rho_0, \rho_1, \ldots \rho_m, F) = T_{\omega_0}(R_0, \rho_0, G_0, F_0) +$$

$$+ T_{\omega_1}\left(\frac{R_1}{\rho_1}, G_1, F_1\right) + \ldots + T_{\omega_m}\left(\frac{R_m}{\rho_m}, G_m, F_m\right), \qquad (2.6)$$

где $T_{\omega_k}(R_k/\rho_k, G_k, F_k)$ $k \neq 0$ и $T_{\omega_0}(R_0, \rho_0, G_0, F_0)$ определяются формулами (2.4) и (2.4'), назовем $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m$—характеристической функцией функции $F(z)$, мероморфной в $G((z_0 R_0)(\alpha_1, R_1), \ldots, (\alpha_m R_m))$

Теорема 2.1'. *Пусть $\omega_0(x) \in \Omega^*$, $\omega_k(x) \in \Omega$ $(k=1, \ldots, m)$. Если функция $\omega_i(x)$ не возрастает в $[0, 1)$, то функция $T_{\omega_0, \ldots, \omega_m}(\rho_0, \ldots, \rho_m, F)$ при фиксированном ρ_k, $k \neq i$ $k=0, 1, \ldots, m$—неубывающая функция по ρ_i в промежутке $0 < \rho_i < 1$.*

Доказательство следует из леммы 1.2 и из соответствующих свойств $T_{\omega_i}(\rho_i F_i^*)$.

Теорема 2.2. *Для любой мероморфной в G функции $F(z)$ и для любых функций $\omega_0(x)\in\Omega^*$, $\omega_k(x)\in\Omega$ $(k=1,\ldots,m)$ справедливо тождество*

$$T_{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_m}(\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_m,F)=\log|c_\lambda|+T_{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_m}\left(\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_m\frac{1}{F}\right)$$

$$\begin{pmatrix}0<\rho_k<1\\ k=0,\ldots,m\end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Доказательство теоремы следует из леммы (2,1) из теоремы (3,2) М. М. Джрбашяна ([1] стр. 567) и того, что $F_k(\infty)=1$ $k=1,2,\ldots,m$.

Определение: обозначим через $N^*\{\omega_0,\ldots,\omega_m,G\}$ или $N\{\omega_0,\ldots,\omega_m,G\}$ класс мероморфных в G функций, которые для $\omega_0(x)\in\Omega^*$, $\omega_k(x)\in\Omega$ $k=1,2,\ldots,m$, или для $\omega_k(x)\in\Omega$ $k=0,1,\ldots,m$ удовлетворяют следующему условию:

$$T_{\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_m}(G,F)=\sup_{\substack{0<\rho<1\\ k=0,1,\ldots,m}}\{T_{\omega_0,\ldots,\omega_m}(\rho_0,\rho_1,\ldots,\rho_m,F)\}<+\infty. \tag{2.8}$$

Из (2.6), поскольку слагаемые, написанные в правой части, неотрицательные, кроме, может быть, члена $n(0,G_0,\infty)\{\log R_0\rho_0-K_\infty\}$, который стремится к $-n(0,G_0,\infty)\{K_\infty-\log R_0\}$, когда ρ_0 стремится к единице, то есть для ρ_0, достаточно близких к единице, ограничен, имеет место следующая теорема:

Теорема 2,3. $T_{\omega_0,\ldots,\omega_m}(G,F)<+\infty\Leftrightarrow\forall n(n=0,1,\ldots,m)$ $T_{\omega_n}(G_n,F_n^*)<+\infty$.

Следствие 1. $F(z)\in N^*\{\omega_0,\ldots,\omega_n,G\}$ или $F(z)\in N\{\omega_0,\ldots,\omega_m,G\}\Leftrightarrow\forall n(n=1,\ldots,m)$, $F_0(z)\in N^*\{\omega_0 G_0\}$, $F_n(z)\in N\{\omega_n,G_n\}$ или $\forall n(n=0,1,\ldots,m)$ $F_n(z)\in N\{\omega_n,G_n\}$

Следствие 2. Если $F(z)\in N^*\{\omega_0,\ldots,\omega_m,G\}$, $\Phi(z)\in N^*\{\omega_0,\ldots,\omega_m G\}$, то

$$F(z)\,\Phi(z)\in N^*\{\omega_0,\ldots,\omega_m G\},\ \frac{F(z)}{\Phi(z)}\in N^*\{\omega_0,\ldots,\omega_m,G\}.$$

Действительно, если $F(z)=F_0(z)\ldots F_m(z)$, $\Phi(z)=\Phi_0(z)\ldots\Phi_m(z)$, то $F(z)\Phi(z)=\{F_0(z)\Phi_0(z)\}\ldots\{F_m(z)\Phi_m(z)\}$, $\frac{F(z)}{\Phi(z)}=\left\{\frac{F_0(z)}{\Phi_0(z)}\right\}\cdots\left\{\frac{F_m(z)}{\Phi_m(z)}\right\}$

и доказательство следствия следует из соответствующих свойств классов $N^*\{\omega_n,G_n\}$.

Теорема (основная). $F(z)\in N^*\{\omega_0,\ldots,\omega_m,G\}\Leftrightarrow$ в области G

$$F(z)=e^{i\gamma+\lambda K_\infty}\left(\frac{z-z_0}{R_0}\right)^{\lambda}\frac{B_{\omega_0}\left(\frac{z-z_0}{R_0},\frac{a_\mu^{(0)}-z_0}{R_0}\right)\prod\limits_{k=1}^{m}B_{\omega_k}\left(\frac{R_k}{z-\alpha_k},\frac{R_k}{a_\mu^{(k)}-\alpha_k}\right)}{B_{\omega_0}\left(\frac{z-z_0}{R_0},\frac{b_\nu^{(0)}-z_0}{R_0}\right)\prod\limits_{k=1}^{m}B_{\omega_k}\left(\frac{R_k}{z-\alpha_k},\frac{R_k}{b_\nu^{(k)}-\alpha_k}\right)}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(e^{-i\theta}\frac{z-z_0}{R_0},\omega_0\right)d\psi_0(\theta)+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S\left(e^{-i\theta}\frac{R_k}{z-\alpha_k},\omega_k\right)d\psi_k(\theta)\right\},$$

где $l \geq 0$ натуральное число, $\psi_k(\theta)$ $k=0,\ldots,m$ вещественные функции на $[0, 2\pi]$ с конечным полным изменением, γ — вещественные число, K_ω определяется формулой (12′).

Доказательство. Из (1. 7), если положим $F_0^*(w)=F_0(z_0+R_0 w)$, $\underset{k=1,\ldots,m}{F_k^*(w)}=F_k\left(a_k+\frac{R_k}{w}\right)$ из (2, 5), (2, 5′) получим:

$$F_0(z)\in N^*\{\omega_0 G_0\}, \quad \underset{k=1,\ldots,m}{F_k(z)\in N\{\omega_k, G_k\}} \Leftrightarrow F_0^*(w)\in N^*\{\omega\}, \quad F_k^*(w)\in N\{\omega\} \tag{2.19}$$

Написав отдельно для каждого $F_k^*(w)$ $k=0, 1,\ldots, m$ теоремы (C) и переходя к переменному z, получим доказательство теоремы.

В заключение автор благодарит В. С. Захаряна за руководство.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна.

Դ. Ժ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

Բազմակապ տիրույթում մերոմորֆ ֆունկցիաների դասեր և նրանց պարամետրական ներկայացումը

Հոդվածում ստացված է շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների համար Մ. Մ. Ջրբաշյանի հայտնի արդյունքների անալոգները բազմակապ տիրույթների դեպքում։

Ստացված է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից ընդհանրացված Նևանլինի բանաձևի անալոգը բազմակապ տիրույթում մերոմորֆ ֆունկցիաների համար։

Սահմանված է բազմակապ տիրույթում մերոմորֆ ֆունկցիաների խարակտերիստիկ ֆունկցիաների գաղափարը։ Այդ ֆունկցիաները օժտված են նույնատիպ հատկություններով, ինչ որ միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների համար Մ. Մ. Ջրբաշյանի խարակտերիստիկ ֆունկցիաները։

Սահմանված է սահմանափակ խարակտերիստիկներով ֆունկցիաների դասեր և ստացված է նրանց պարամետրական ներկայացումը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Джрбашян*, Математический сборник, т. 79, № 4, 517—615 (1969). [2] *Г. У. Матевосян*, «Известия АН АрмССР», Математика, т. IX, № 5, 1974. [3] *Г. У. Матевосян*, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Ереван, 1975. [4] *Р. Неванлина*, Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М.—Л., 1941.