ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 1

МАТЕМАТИКА

УДК 519.1.

П. Г. Алексанян

О восстанавливаемости векторов по их фрагментам

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 29/XII 1978)

В работе [1] доказывается, что каждый n-мерный вектор для любого целого числа $k \leqslant n/2$, однозначно восстанавливается по множеству всех своих фрагментов, длины $n-k$.

В настоящей работе усиливается этот результат до случая $k \leqslant n-3$. $(n-k)$-фрагментом вектора $T=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, назовем его $(n-k)$-подвектор, который получается от вектора путем удаления из него произвольных k элементов (координатов), не нарушая при этом порядок в оставшихся $n-k$ элементах. В дальнейшем будем рассматривать векторы, элементы которых принадлежат множеству $B=\{0, 1\}$.

Через $T(z)$ обозначим множество всех фрагментов длины z вектора T, а через $N(T, 0)$, $N(T, 1)$ обозначим соответственно число нулей и число единиц в векторе T.

Пусть $T=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ произвольный n-мерный вектор. Через $x_{j_1}, x_{j_2}, x_{j_{N(T,1)}}$, где $j_t < j_s$ при $t < s$ обозначим единицы вектора $T=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Обозначим: $y_1(T)=j_1-1$, $y_i(T)=j_i-j_{i-1}-1$ при $i \in [2, N(T,1)]$, $y_{N(T,1)+1}(T)=|T|-j_{N(T,1)}$.

Через $T^i(z)$, где $z \in [3, n-1]$, $i \in [1, z]$, обозначим множество фрагментов из $T(z)$, i-ая координата которой равна нулю, а все остальные — единице.

П р е д л о ж е н и е 1: Для любых векторов T_1 и T_2 и для любого $z \in [3, |T_1|-1]$ если $T_1(z)=T_2(z)$, и $N(T_1, 1)=z$ то $T_1=T_2$.

Пусть T_1 и T_2 произвольные n-мерные вектора, удовлетворяющие условиям предложения. Легко заметить, что при $i=1, 2$ справедлива следующая система уравнений:

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n-k+1} y_j(T_j) = |T_1| - z \\
(n-k)y_1(T_i) + y_2(T_i) = |T^1(z)| \\
(n-k-1)y_2(T_i) + y_3(T_i) = |T^2(z)| \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
2y_{n-k-1}(T_i) + y_{n-k}(T_i) = |T^{n-k-1}|(z)| \\
y_{n-k}(T_i) + (n-k)y_{n-k+1}(T_i) = |T^{n-k}(z)|
\end{cases}
$$

Как показывает прямой подсчет, эта система имеет единственное решение, т. е. $T_1 = T_2$.

Предложение 2. Для любого $z \in [3, n-1]$, если $T_1(z) = T_2(z)$ и $3 \leqslant N(T_1, 1) < z$ то $T_1 = T_2$. Склеиванием векторов $\alpha_1 = (z_{1.1}, z_{1.2}, \ldots, z_{1.n})$ и $\alpha_2 = (z_{2.1}, z_{2.2}, \ldots, z_{2.n})$ называется вектор $\alpha = \alpha_1\alpha_2 = (z_{1.1}, \ldots, z_{1.n}, z_{2.1}, \ldots, z_{2.n})$. С помощью вектора β, где $|\beta| = N(\beta, 1) = z - N(T_1, 1)$ образуем векторы $T_1^0 = T_1 \cdot \beta$ и $T_2^0 = T_2 \cdot \beta$. Из равенства $T_1^0(z) = T_2^0(z)$ и из предложения 1 следует, что $T_1^0 = T_2^0$, т. е. $T_1 = T_2$.

Следствие. При любом $z \in [3, |T_1| - 1]$, если $T_1(z) = T_2(z)$ и $|T_1| - 3 \geqslant N(T_1, 1) \geqslant n - z$, то $T_1 = T_2$. Действительно, достаточно воспользоваться предложением 1.

Предложение 3. Для любого $k \leqslant |T_1| - 3$, если $T_1(n-k) = T_2(n-k)$ и $N(T_1, 1) < k$, то $T_1 = T_2$. С помощью вектора β, где $|\beta| = N(\beta, 1) = k - N(T_1, 1)$, образуем вектора $T_1^0 = T_1 \cdot \beta$ и $T_2^0 = T_2 \cdot \beta$. Легко проверитъ, что $T_1^0(n-k) = T_2^0(n-k)$, т. е. $T_1 = T_2$. Простым перебором случаев легко заметить, что имеет место.

Предложение 4. При любом $z \in [3, |T_1| - 1]$, если $T_1(z) = T_2(z)$ и $N(T_1, 1) \leqslant 2$, то $T_1 = T_2$.

Из предложений 1, 2, 3 и 4 получается следующая.

Теорема. *Для любого* $z \in [3, |T_1| - 1]$, *если* $T_1(z) = T_2(z)$, *то* $T_1 = T_2$.

Пример векторов $T_1 = (100001)$ и $T_2 = (010010)$ показывает, что утверждение теоремы при $z \leqslant 2$ не верно.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского Государственного университета

Գ. Դ. ԱՍԼԱՆՅԱՆ

Վեկտորի վերականգնումն ըստ իր ենթամասերի

$T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ վեկտորի $(n-k)$ ենթամաս կոչվում է նրա $(n-k)$ ենթավեկտորը, որը ստացվում է առաջինից որևէ k անդամներ հեռացնելուց՝ մնացած անդամների կարգը չփոխելով։ Ներկա աշխատանքում ապացուցվում

է, որ կամայական n-չափանի վեկտոր ցանկացած $z \in [3, n-1]$ ամբողջ թվի համար միարժեքորեն վերականգնվում է իր բոլոր z չափանի ենթամասերի միջոցով։ Այս արդյունքն ընդհանրացնում է Լ. Ի. Կալաշնիկի աշխատանքը, որտեղ ապացուցվում է, որ կամայական n-չափանի վեկտոր միարժեքորեն վերականգնվում է իր $(n-k)$ չափանի ենթամասերի միջոցով, երբ $k \leq n/2$։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. И. Калашник*, Однозначная восстанавливаемость векторов по их фрагментам. В сб. «Вычислит. мат. и вычисл. техн.». Вып. 4. Харьков, 1973.