ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 1

УДК 51.01 : 518.5

МАТЕМАТИКА

М. Ю. Ходжаяни

О структуре e-степеней

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 13/XII 1978)

В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с разбиением произвольных e-степеней на степени неразрешимости. Поскольку e-сводимость является самой общей из сводимостей по разрешимости, то вводится понятие eT-сводимости — конъюнкции этих сводимостей, которое будет самым общим для сводимостей, являющихся одновременно и сводимостями по перечислимости и сводимостями по разрешимости. Поэтому изучается структура произвольных e-степеней относительно eT-сводимости. Рассматриваются также вопросы разбиения e-степеней относительно более сильной сводимости по перечислимости — pc-сводимости. Все эти сводимости, за исключением eT-сводимости, изучаются в (1) и (2). В дальнейшем мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в (1).

Пусть φ и W — стандартные нумерации частичнорекурсивных функций и рекурсивно перечислимых множеств, φ^X-стандартная нумерация частичнорекурсивных функции с оракулом X, а D — каноническая нумерация конечных множеств (1).

Рассмотрим следующие отношения на множествах:

$A\leqslant_c B\Leftrightarrow\exists f$ — общерекурсивная функция $\forall x(x\in A\Leftrightarrow D_{f(x)}\in B)$.

$A\leqslant_T \Leftrightarrow\exists z(c_A=\varphi_z^B)$, где c_A — характеристическая функция множества A.

$$A\leqslant_{pc}B\Leftrightarrow\exists z\forall x(x\in A\Leftrightarrow!\varphi_z(x)\ \&\ D_{\varphi_z(x)}\subseteq B).$$

$$A\leqslant_e B\Leftrightarrow\exists z\forall x(x\in A\Leftrightarrow\exists u(\langle x,u\rangle\in W_z\ \&\ D_u\subseteq B)).$$

$$A\leqslant_{eT}B\Leftrightarrow A\leqslant_e B\ \&\ A\leqslant_T B.$$

Все эти отношения мы будем называть сводимостями. Пусть a — некоторая сводимость. Тогда

$$A\equiv_a B\Leftrightarrow A\leqslant_a B\ \&\ B\leqslant_a A.$$

и множество $d_a(A)=\{B|B\equiv_a A\}$ называется a-степенью множества A. Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ произвольные a-степени. Тогда

$$a \leqslant_a b \leftrightarrow \exists A \exists B (A \in a \ \& \ B \in b \ \& \ A \leqslant_a B)$$

Через $\mathbf{0}$ мы будем обозначать e-степень множества $\varnothing$. Очевидно, что $\mathbf{0}$ совпадает с множеством всех рекурсивно перечислимых множеств. Заметим, что для произвольных множеств A и B

$$A \leqslant_c B \supset A \leqslant_{eT} B$$

$$A \leqslant_e B \supset A \leqslant_{pc} B$$

$$A \leqslant_{pc} B \supset A \leqslant_e B.$$

Определение 1. e-степень называется тотальной, если она содержит график некоторой всюду определенной функции.

Определение 2. e-степень $\mathbf{a}$ называется квазиминимальной, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \ \& \ \forall \mathbf{b} (\mathbf{b}$ — тотальная e-степень $\& \ \mathbf{b} \leqslant_e \mathbf{a} \supset \mathbf{b} = \mathbf{0})$. Очевидно, что любая квазиминимальная e-степень не является тотальной. Отметим, что произвольная e-степень $\mathbf{a}$ содержит наибольшую eT— и pc-степень. Таковыми являются eT— и pc-степени множества

$$\{\langle x, y\rangle | \exists u (\langle y, u\rangle \in W_x \ \& \ D_u \subseteq A)\}, \text{ где } A \in \mathbf{a}.$$

Предложение 1. а) $\mathbf{a}$ *— тотальная е-степень* $\leftrightarrow \exists A (A \in \mathbf{a} \ \& \ \overline{A} \leqslant_e A)$. б). *Пусть* $\mathbf{a}$ *— тотальная е-степень,* $A \in \mathbf{a}$ и $\overline{A} \leqslant_e A$. *Тогда* $\forall B (B \in \mathbf{a} \leftrightarrow A \leqslant_e B \ \&$ B *рекурсивно перечислимо относительно* $A)$.

Предложение 2. *Любая тотальная е-степень содержит наименьшую eT-степень.*

Предложение 3. *Любая тотальная е-степень содержит бесконечную антицепь eT-степеней.*

Доказательство проводится с помощью небольшого изменения в доказательстве теоремы Мучника—Фридберга (см., например, [1]) и предложения 1.

Предложение 4. *Множество всех eT-степеней, содержащихся в произвольной тотальной е-степени, является плотным.*

Это утверждение доказывается с помощью небольшого изменения в доказательстве теоремы Сакса о плотности множества рекурсивно перечислимых T-степеней (см., например, [3]) и предложения 1.

Теорема 1. *Существует квазиминимальная е-степень, содержащая наименьшую c-степень.*

Следствие 1. *Существует квазиминимальная е-степень, содержащая наименьшую eT-степень.*

Следствие 2. *Существует квазиминимальная е-степень, содержащая наименьшую pc—степень.*

Теорема 2. *Существует квазиминимальная е-степень, не содержащая наименьшей eT—степени.*

Теперь перейдем к рассмотрению структур произвольных e-степеней относительно pc-сводимости. Мы уже показали (следствие 2), что существует квазиминимальная e-степень, содержащая наименьшую pc-степень. Следующая теорема аналогична теореме 2.

Теорема 3. *Существует квазиминимальная е-степень, не содержащая наименьшей рс-степени.*

Пусть $\mathbf{a}$—некоторая e-степень. Введем следующее обозначение:

$$B \leqslant_T \mathbf{a} \Leftrightarrow \forall A (A \in \mathbf{a} \supset B \leqslant_T \mathbf{a}).$$

Тогда из предложения 2 следует, что, если $\mathbf{a}$-тотальная e-степень и множество $A \in \mathbf{a}$ таково, что $\bar{A} \leqslant_e A$, то

$$\forall B (B \leqslant_T \mathbf{a} \Leftrightarrow B \leqslant_T A).$$

Теорема 4. *Для произвольного множества С существуют множества А и В, удовлетворяющие следующим условиям:*

1. $C \leqslant_e A$ и $C \leqslant_e B$
2. $\forall R (R \leqslant_{pc} A \; \& \; R \leqslant_{pc} B \supset R$ *рекурсивно перечислимо*).
3. $\varnothing'' \leqslant_T C \supset A$ и B *рекурсивно перечислимы относительно* C.

Следствие 3. *Если* $\mathbf{a}$*-тотальная е-степень такая, что* $\varnothing'' \leqslant_T \mathbf{a}$, *то* $\mathbf{a}$ *не содержит наименьший рс-степени.*

Теорема 5. *Пусть множество* A *таково, что* $\bar{A} \leqslant_e A$ и $\varnothing' \leqslant_T A$. *Тогда существует множество В, обладающее следующими свойствами:*

$$1.\ A \leqslant_{pc} B.$$

$$2.\ B \nleqslant_{pc} A.$$

$$3.\ B \leqslant_T A.$$

Следствие 4. *Если* $\mathbf{a}$ *—тотальная е-степень такая, что* $\varnothing' \leqslant_T \mathbf{a}$, *то* $\mathbf{a}$ *содержит бесконечную цепь рс—степеней, упорядоченную по типу натуральных чисел.*

Теорема 6. *Если* $\mathbf{a}$ *—тотальная е-степень такая, что* $\varnothing' \leqslant_T \mathbf{a}$, *то* $\mathbf{a}$ *содержит бесконечную антицепь рс-степеней.*

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Մ. ՅՈՒ. ԽՈՋԱՅԱՆ

e–աստիճանների կառուցվածքի մասին

Հոդվածում հետազոտված են e-աստիճանների տրոհումներն ըստ այլ ալգորիթմիկ հանգեցումների։ Ապացուցված է այնպիսի իբր-մինիմալ e-աստիճանի գոյությունը, որը պարունակում է նվազագույն C-աստիճանի։ Ցույց է տրված այնպիսի e-աստիճանների գոյությունը, որոնք չեն պարունակում նվազագույն eT-աստիճան, ինչպես նաև նվազագույն pc-աստիճանի։ Յուրաքանչ-

յուր բավականաչափ բարձր e-աստիճան, որը պարունակում է ամենուրեք որոշված ֆունկցիայի գրաֆիկ, պարունակում է նաև զույգ առ զույգ անհամեմատելի pc-աստիճանների անվերջ ընտանիք ․

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Х. Роджерс*, Теория рекурсивных функций эффективная вычислимость, М., „Мир", 1972. [2] *Е. А. Поляков, М. Г. Розинас*, Теория алгоритмов, Иваново, 1976. [3] *R. I. Soare*. The infinite injury priority. method. J. Symb. Log. vol. 41, 2, 513–529, (1976)