

УДК 51 : 621.391.

МАТЕМАТИКА

Э. М. Погосян

К классификации проблем расшифровки описаний

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 21/XI 1978)

1. В работе выделены шесть параметров, посредством конкретизации которых известные конечные проблемы поиска стратегий в шахматах, расшифровки автоматов, формирования понятий или образов, распознавания тавтологий от n — переменных (ТАВТ n) и др. представлены как разновидности общей *проблемы расшифровки описаний* (ПРО). Параметрами являются конечное множество описаний всех возможных решений заданной проблемы и множество всех элементарных компонент этих описаний, отношение между входными и выходными словами, списки элементарных вычислений рассматриваемых для решения проблем алгоритмов и их вопросов к оракулу. Проблемы формулируются как требования к построению алгоритмов предельных вычислений АПВ⁽¹⁾ с оракулом с минимальными пиковой (π) или средней (σ) временными сложностями решения индивидуальных задач.

Согласно критерию полиномиальной разрешимости ⁽²⁾ ПРО не должна считаться переборной, поскольку ее сложность ограничена константой. В то же время астрономические масштабы этих констант указывают на недостаточную адекватность понятия полиномиальности действительной сложности конечных проблем. Нами рассмотрен, в частности, следующий критерий высокой сложности: ПРО относится к переборной, если ее $\pi(\sigma)$ — сложность больше мощности множества всех элементарных компонент описаний возможных решений проблемы. Описан класс ПРО, представляющих при некоторых естественных ограничениях проблемы расшифровки автоматов, формирования понятий, ТАВТ n и др; доказано, что они могут иметь переборную π — сложность. Сформулирована гипотеза о том, что нижние оценки π — сложности ПРО не меньше длины минимального теста специальным образом построенной для этой ПРО таблицы булевых векторов.

2. Пусть M — произвольное конечное множество и $T = [(M_1, M_0) | M_1, M_0 \subseteq M \text{ и } M_1 \cap M_0 = \emptyset]$. Элементы T , или пары множеств (ПМ), пронумеруем, через x обозначим соответствующий нумерующий, а через γ_1, γ_0 — декодирующие операторы, выделяющие по произвольному номеру первую и вторую компоненты ПМ с этим номером. Каждая ПМ и ее номер отождествляются. Элементы множества $\{x | x \in T \text{ и } |x| = |M|\}$, где $|x| = |\gamma_1(x) \cup \gamma_0(x)|$, назовем *абсолютными* (абс.) ПМ.

Наши дальнейшие рассмотрения, связанные с вычислениями, будут проводиться в классе алгоритмов предельных вычислений (АПВ) с оракулом. АПВ формализуют процедуры индуктивного вывода. Их описание посредством машины Тьюринга, также как понятия функционала, вычисляемого заданным АПВ, приведены в (1). Выбор класса АПВ вытекает из принятого нами тезиса о том, что в исследуемом классе задач решения, как правило, представляются в виде последовательности гипотез, приближающихся к идеальному решению.

Для АПВ, работающих с оракулом, в дополнение к определению из (1) предполагается, что в некоторые моменты времени на рабочей ленте могут оказаться записи, которые понимаются как вопросы к оракулу. Ответ оракула печатается вслед за вопросом через время, специально указанное для каждого вопроса. Список вопросов, возможных ответов на них и требуемое время (C_0), также как список элементарных вычислений АПВ (C_1), задаются заранее. Через $F(C_0, C_1)$ будем обозначать множество всех АПВ с фиксированными списками C_0 и C_1 .

В дальнейшем термин «функционал» используется для отображений вида $\psi: X \rightarrow Y$, где X — множество входных слов в подходящем алфавите, а Y — множество абс. ПМ некоторого M .

Пусть $\psi: X \rightarrow Y$ — функционал, а $\varphi \subseteq X \times Y$ — отношение такое, что $\forall x \in X \exists y \in Y \langle x, y \rangle \in \varphi$ и $\forall x_1, x_2 \in X$ множества $\{y | \langle x_1, y \rangle \in \varphi\}$ и $\{y | \langle x_2, y \rangle \in \varphi\}$ (φ — классы приближений x_1 и x_2) либо не пересекаются, либо одно из них содержится в другом.

Определение. Будем говорить, что функционал ψ *моделирует отношение* φ , если $\forall x (\langle x, \psi(x) \rangle \in \varphi)$; соответственно, АПВ *моделирует* φ , если функционал ψ , вычисляемый АПВ, моделирует φ .

Определение. *Временной сложностью* $S(\varphi, x, f)$ *отношения* φ *на аргументе* x *относительно* АПВ $f \in F(C_0, C_1)$ назовем длину отрезка времени между печатанием x на входной ленте и первым появлением предельного числа на выходной, если f моделирует φ , и константу C_φ , зависящую от φ , в противном случае.

Данное определение имеет сходные черты с определением временной сигнализирующей из (3).

Определение. ε -*сложностью* φ *относительно* f назовем число $\sigma(\varphi, f) = \sum_{x \in X} \frac{S(\varphi, x, f)}{|X|}$, а π -*сложностью* — число $\pi(\varphi, f) = \max_{x \in X} S(\varphi, x, f)$.

Определение. ε -*сложностью* φ и π -*сложностью* φ *относительно* $F \subseteq F(C_0, C_1)$ назовем $\sigma(\varphi, F) = \min_{f \in F} \sigma(\varphi, f)$ и $\pi(\varphi, F) = \min_{f \in F} \pi(\varphi, f)$, соответственно.

3. ПРО формулируется следующим образом.

Дано: 1. конечное множество M —элементарные компоненты описаний; 2. непустое множество T' абс. ПМ в M —описания возможных решений; 3. конечное множество входных записей U ; 4. списки элементарных вычислений АПВ (C_1) и их обращений к оракулу (C_0); 5. оракул "задумал" некоторое отношение $\varphi \subseteq U \times T'$, для которого существует не менее одного АПВ, моделирующего φ за конечное время.

Требуется из подмножества F_φ , всех тех АПВ из $F(C_0, C_1)$, которые моделируют φ , выделить АПВ f_* и $f_\#$ такие, что $\pi(\varphi, f_*) = \pi(\varphi, F_\varphi)$ и $\sigma(\varphi, f_\#) = \sigma(\varphi, F_\varphi)$.

Укажем на ряд известных и на первый взгляд далеких друг от друга проблем, которые могут быть представлены как разновидности ПРО.

Определение. Для произвольной позиции P графа шахматной игры Γ P -стратегией назовем произвольный подграф G графа Γ с корнем P такой, что: 1. если в i -ом ярусе G ход "белых", то из каждой вершины этого яруса исходит не более одного ребра, указывающего на один из допустимых в этой вершине ходов "белых"; 2. если в i -ом ярусе G ход "черных", то из каждой вершины этого яруса исходят либо все допустимые в ней ходы, либо ни одного.

Определение. P -стратегию G назовем наиболее близкой к выигрышной в позиции P , если для выигрышной или ничейной PG обеспечивает их независимо от игры противника, а для проигрышной PG удовлетворяет условию $\min_{x \in G_P} \alpha(x)/\beta(x)$, где G_P множество всех P -стратегий, с известным выигрышем одного из противников, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ —число проигрышных, выигрышных или ничейных конечных вершин P -стратегии x соответственно.

Первый ход произвольной наиболее близкой к выигрышной P -стратегии назовем оптимальным ходом в P .

Проблема оптимального управления в шахматах (ПОУ) формулируется следующим образом.

Дано: 1) начальная позиция P_0 , алгоритмы порождения из произвольной допустимой позиции всех других допустимых позиций для "белых" и для "черных", алгоритмы распознавания выигрышных и проигрышных позиций, ничейных позиций или последовательностей позиций; 2) существует отношение φ , $\varphi \subseteq |P| \times |P|$, где $|P|$ —множество всех позиций, порожденных из P_0 , такое, что $\langle P, P_i \rangle \in \varphi$ тогда и только тогда, когда она является некоторым оптимальным в P ходом; 3) списки C_1, C_0 .

Требуется из множества F_φ всех тех АПВ из $F(C_0, C_1)$, которые моделируют φ , выделить оптимальные АПВ f_* и $f_\#$.

Проблема поиска в графе игры наиболее близкой к выигрышной

Р-стратегии (ПСГ) формулируется аналогично ПОУ, но φ определяется подмножествами $|P| \times |G_P|$.

Теорема 1. Для каждой из проблем ПОУ, ПСГ, ТАВТ_n можно указать параметры ПРО такие, что соответствующая конкретизация ПРО будет эквивалентна этой проблеме.

3.2. Определение. Будем говорить, что отношение φ *инициально полно*, если существует АПВ, моделирующий φ без обращений к оракулу; если для произвольных АПВ f и пар $\langle x_1, y \rangle, \langle x_2, y \rangle \in \varphi$, начальные отрезки последовательностей состояний f для входов x_1 и x_2 при отсутствии обращений к оракулу совпадают начиная со второго состояния, а для первого состояния отличаются только входной записью, то φ назовем *инициально пустым*.

Проблемы ПОУ, ПСГ, ТАВТ_n относились к инициально полным. Рассмотрим подкласс ПРО (ПРО1) в котором: 1. множество U — инициально пусто, а отношение φ разбивает T' на непустые φ —классы $\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_r)$, где $|u_1, \dots, u_r| = U$; 2. вопросы произвольного АПВ f к оракулу имеют следующий вид: пусть U — входная запись и $\varphi(u)$ — соответствующий φ —класс; если перенумеровать элементы $\varphi(u)$ условно через $a_1, a_2, \dots$ и зафиксировать номер a , то f спрашивает: $\beta \in \gamma_1(v_a)$ или $\beta \in \gamma_0(v_a)$, где β — произвольный элемент из M и v_a — ПМ из $\varphi(u)$, которому оракул и f “договорились” присвоить номер a ; 3. отношение φ можно промоделировать, например, следующим АПВ f : при каждом $u \in U$ f производит опрос оракула и строит гипотезы для некоторого $v \in \varphi(u)$; ясно, что для появления v на выходе f достаточно не более $|M|$ вопросов.

Теорема 2. Для каждой из проблем: расшифровки автоматов по Б. А. Трахтенброту — Я. М. Барздиню, формирования понятий по Э. Ханту, обучения распознаванию образов по Я. З. Цыпкину — М. А. Айзерману — Э. М. Браверману и др., построению экстремального распознающего алгоритма по Ю. И. Журавлеву — В. В. Никифорову, распознаванию образов в статистической постановке по В. Н. Вапнику — А. Я. Червоненкису, можно указать параметры ПРО1 такие, что соответствующая конкретизация ПРО1 будет эквивалентна этой проблеме.

В действительности теорема 2 справедлива при некоторых дополнительных предположениях относительно перечисленных проблем, а термин “эквивалентность” использован нами несмотря на отсутствие во многих из них сложностного уточнения.

Отметим, что в рамках ПРО нами представлены и др. проблемы, в частности, формирования образов шахматных позиций и стратегий.

4 Итак, ПРО есть массовая проблема с параметрами $\langle M, T', U, \varphi, C_0, C_1 \rangle$, в которой индивидуальные задачи определяются фиксацией некоторой записи из U . Сравнение сложности решения конкретных ПРО и их соответствующая классификация может быть основана на анализе этих параметров.

Определение. Будем говорить, что ПРО с параметрами $\langle M, T', U, \varphi, C_0, C_1 \rangle$ $\pi(\varepsilon)$ — переборная, если $\pi(\varepsilon)$ — сложность этой ПРО больше $|M|$.

Напомним, что для произвольной таблицы T n — мерных попарно различных векторов с разбиением на классы $K_1, \dots, K_r$ набор координат $x_1, \dots, x_m$, $1 \leq m \leq n$, называют *тестом* для T относительно этого разбиения, если проекции векторов произвольных различных классов $K_1, \dots, K_r$ в пространстве $x_1, \dots, x_m$ также попарно различны.

Справедлива следующая

Теорема 3. Для произвольной ПРО $\langle M, T', U, \varphi, C_1 \rangle$ $\pi(\varphi, F\varphi) \geq l_{\min}(k, T', \varphi)$, где $l_{\min}(k, T', \varphi)$ — длина минимального теста для заданных φ — классов таблицы, определяемой T' , а $k = |M|$.

Беспереборный алгоритм для нижней границы $l_{\min}(k, T', \varphi)$ приведен в (4). Если φ — классы одноэлементны, то оценки длины минимальных тестов можно найти в (5). Из них, в частности, следует, что уже при $|T'| > 2^{1/2} \log k$ и $|T'| > \sqrt{2^{k-\nu} \log k}$, где ν — некоторое натуральное число, почти всегда $l_{\min}(k, T', \varphi) \geq k - \nu - 2$, т. е. „гарантированная“ расшифровка ПМ возможна лишь после выяснения принадлежности каждого из элементов M .

Из теоремы 3, в частности, следует, что существуют конечные проблемы, точное решение которых не может быть получено каким-либо регулярным поиском в разумное время и при их решении можно рассчитывать, вообще говоря, только на гипотезы различной степени правдоподобия. Представляется, что данное следствие служит подтверждением аналогичной идеи, высказанной Н. А. Шаниным (Телави, май 1978 г.).

Возникает вопрос: не является ли π — переборная сложность ПРО1 следствием инициальной пустоты входных записей? Существуют ли $\pi(\varepsilon)$ — переборные ПРО с инициально полными входными записями? Ответ на последний вопрос мы надеемся получить посредством оценки длины минимальных тестов для таблиц, специальным образом порождаемых заданным ПРО. Представляется естественным гипотеза о том, что произвольный АПВ может найти решение заданной индивидуальной задачи ПРО за время не меньшее чем длина минимального теста, достаточного для различения ПМ, описывающих решения этой задачи, от всех других ПМ.

В заключение автор приносит глубокую благодарность Г. Б. Маранджину за полезное обсуждение работы.

Вычислительный центр

Академии наук Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

նկարագրությունների դեկոդավորման սլոբիլեմների դասակարգման մասին

Աշխատանքում զատված են վեց պարամետրեր, որոնց կոնկրետիզացման միջոցով ավտոմատների դեկոդավորման, շախմատային ստրատեգիաների փնտրման, գաղափարների կազմավորման, Ո-փոփոխականների տավտոլոգիաների ճանաչման և այլ հայտնի վերջավոր պրոբլեմները ներկայացված են որպես ընդհանուր նկարագրությունների դեկոդավորման պրոբլեմի տարատեսակներ: Այդ պրոբլեմների բավականի լայն ենթադասի համար ապացուցված է, որ նրանց լուծման բարդության հերթին գնահատականը ունի առավելագույն արժեք:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ P. B. Фрейвалд, Ученые записки Латвийского государственного университета им. Петра Стучки, вып. I, т. 210, Рига, 1974. ² Ричард М. Карп, Сводимость комбинаторных проблем, Киб. сборник, в. 12, М., 1975. ³ P. B. Фрейвалд, Ученые записки Латвийского государственного университета им. Петра Стучки, вып. II, т. 233, Рига, 1975. ⁴ Э. М. Погосян, ДАН Арм. ССР, т. L, № 2 (1970). ⁵ А. Д. Коршунов, «Кибернетика», № 6, 1970.