ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVIII 1979 1

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

О спектральном разложении одного класса несамосопряженных операторов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 21/XI 1978)

В работах ([1-3]) Р. А. Александрян показал, что самосопряженный оператор A с чисто непрерывным спектром, в сепарабельном гильбертовом пространстве H обладает полной системой собственных функционалов, а также указал методику построения этой системы собственных функционалов с помощью резольвенты оператора A. При установлении этого результата было использовано то обстоятельство, что в соответствии с основной теоремой спектральной теории самосопряженных операторов, существует неубывающая на вещественной оси функция $\rho(\lambda)$ и такое изометрическое отображение V пространства H на гильбертово пространство L^2_ρ комплексных функций, интегрируемых с квадратом модуля по мере $\rho(\lambda)$, которое „диагонализирует" оператор A в том смысле, что

$$VAV^{-1}=\lambda E=Q, \tag{5}$$

т.е. при этом отображении оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную.

Представляет интерес изучение аналогичных вопросов для несамосопряженных операторов.

Обозначим через L—класс несамосопряженных линейных ограниченных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H, мнимая часть которых является одномерным оператором, а спектр чисто непрерывный в H.

Пусть $A\in L$, тогда, как показано в работе М. С. Лифшица ([4]), существует унитарный оператор U, отображающий гильбертово пространство H на пространство комплекснозначных функций $L_2[0,b]$, который оператор A приводит к „треугольному" виду

$$Bf(x)\equiv UAU^{-1}f(x)=\alpha(x)f(x)+\varepsilon i\int_x^b f(t)dt,\quad f(x)\in L_2[0,b], \tag{2}$$

где $\alpha(x)$—вещественная неубывающая измеримая почти всюду конечная функция, а $\varepsilon=\pm1$.

Положим для определенности $\varepsilon=1$. Вводим в рассмотрение функцию распределения для $\alpha(x)$

$$\sigma(t)=\text{mes}\{x: 0\leqslant x\leqslant b,\ \alpha(x)\leqslant t\}\quad(-\infty<t<+\infty). \tag{3}$$

Известно ([5]), что оператор B подобен самосопряженному тогда и только тогда, если функция распределения $\sigma(t)$ удовлетворяет условию Липшица.

Представим гильбертово пространство $L_2[0,b]$ в виде ортогональной суммы двух инвариантных относительно оператора B подпространств

$$L_2[0,b]=h_0\oplus h_1, \tag{4}$$

так что сужение B_0 оператора B в h_0 является самосопряженным оператором, а сужение B_1 оператора B в h_1 является вполне несамосопряженным. Предположим, что функция распределения $\sigma(t)$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда ([5]) вполне несамосопряженная часть B_1 оператора B подобна самосопряженному оператору Q_1 в пространстве $L_2(M)$, определяемому формулой

$$Q_1 f(\xi)=\xi\cdot f(\xi),\quad f(\xi)\in L_2(M), \tag{5}$$

где $M=\{t: \sigma'(t)>0\}$.

Это означает, что существует линейный ограниченный обратимый оператор S_1 (аффинитет), отображающий гильбертово пространство h_1 на пространство $L_2(M)$ так что

$$B_1 f(x)=S_1^{-1}Q_1 S_1 f(x),\quad f(x)\in h_1. \tag{6}$$

Согласно общей теореме Р. А. Александряна ([3]) о спектральном разложении, для самосопряженного оператора B_0 в h_0 существует всюду плотное в h_0 линейное топологическое пространство Ω_{B_0} с более сильной топологией, чем топология исходного пространства h_0, так что имеет место следующее вложение

$$\Omega_{B_0}\subset h_0\subset\Omega^*_{B_0}, \tag{7}$$

у оператора B_0 имеется полная система собственных функционалов $\{T_\lambda^{(0)}\}\ \lambda\in\Lambda_0$ из сопряженного пространства $\Omega^*_{B_0}$, а также имеет место следующая формула разложения

$$\int_0^b \varphi_0(x)\bar{\psi}_0(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}T_\lambda^{(0)}(\varphi_0)\cdot \overline{T_\lambda^{(0)}(\psi_0)}\,d\rho_0^{(\lambda)},\quad \varphi_0,\ \psi_0\in\Omega_{B_0}, \tag{8}$$

$\rho_0(\lambda)$—спектральная функция оператора B_0 в h_0.

Для оператора умножения на независимую переменную Q_1 рассмотрим вложение

$$C(M)\subset L_2(M)\subset C^*(M), \tag{9}$$

где $C(M)$—пространство непрерывных функций с равномерной сходимостью, $C^*(M)$—сопряженное пространство функционалов над $C(M)$.

Система функционалов $\delta_\lambda \in C^*(M)$ (δ_λ — функционал Дирака) является полной системой собственных функционалов для оператора B_1 и имеет место разложение

$$\int_M f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_M \delta_\lambda(f)\cdot\overline{\delta_\lambda(g)}\,d\lambda,\quad f,\ g\in C(M). \tag{10}$$

Обозначим через Ω_{B_1} линейное пространство

$$\Omega_{B_1} = S_1^* C(M). \tag{11}$$

Мы скажем $\varphi_1^{(n)} \xrightarrow{\Omega_{B_1}} 0$ $\varphi_1^{(n)}\in\Omega_{B_1}$, если $\psi_n = S_1^{*-1}\varphi_1^{(n)} \xrightarrow{C(M)} 0$. Пространство Ω_{B_1} инвариантно относительно оператора B_1^*. В самом деле, пусть $\varphi_1\in\Omega_{B_1}$, тогда $B_1^*\varphi_1 = S_1^* Q_1 S_1^{*-1}\varphi_1$, но $Q_1 S_1^{*-1}\varphi_1\in C(M)$, поэтому $B_1^*\varphi_1\in\Omega_{B_1}$.

Построим систему линейных функционалов над пространством Ω_{B_1} по формуле

$$T_\lambda^{(1)}(\varphi_1) = \delta_\lambda\,(S_1^{*-1}\varphi_1)\quad \varphi_1\in\Omega_{B_1}. \tag{12}$$

Линейность функционалов (12) следует из равенств

$$T_\lambda^{(1)}(c\varphi_1 + d\psi_1) = \delta_\lambda\,(cS_1^{*-1}\varphi_1 + d\cdot S_1^{*-1}\psi_1) = c\cdot\delta_\lambda\,(S_1^{*-1}\varphi_1) + d\cdot\delta_\lambda\,(S_1^{*-1}\varphi_1) =$$

$$= c\cdot T_\lambda^{(1)}(\varphi_1) + d\cdot T_\lambda^{(1)}(\varphi_1);\ \varphi_1,\ \psi_1\in\Omega_{B_1}. \tag{13}$$

Функционалы непрерывны над пространством Ω_{B_1}.

Пусть $\varphi_1^{(n)} \xrightarrow{\Omega_{B_1}} 0$. Тогда $S_1^{*-1}\varphi_1^{(n)} \xrightarrow{C(M)} 0$ и

$$T_\lambda^{(1)}(\varphi_1^{(n)}) = \delta_\lambda(S_1^{*-1}\varphi_1^{(n)}) \to 0. \tag{14}$$

Рассмотрим вложение

$$\Omega_{B_1} \subset h_1 \subset \Omega_{B_1}^*. \tag{15}$$

Вышепостроенная система линейных функционалов (12) из $\Omega_{B_1}^*$, является системой собственных функционалов для вполне несамосопряженного оператора B_1. Действительно, для произвольного $\varphi_1\in\Omega_{B_1}$ имеем

$$T_\lambda^{(1)}((B_1^* - \lambda I)\varphi_1) = \delta_\lambda\,(S_1^{*-1}(B_1^* - \lambda I)\,S_1^* S_1^{*-1}\varphi_1) = \delta_\lambda\,((Q_1 - \lambda I)S_1^{*-1}\varphi_1) = 0. \tag{16}$$

Из (10) и (12) имеем

$$\int_M S_1^{*-1}\varphi_1(x)\cdot\overline{S_1^{*-1}\psi_1(x)}\,dx = \int_M \delta_\lambda\,(S_1^{*-1}\varphi_1)\cdot\overline{\delta_\lambda\,(S_1^{*-1}\psi_1)}\,d\lambda = \tag{17}$$

$$= \int_M T_\lambda^{(1)}(\varphi_1)\cdot\overline{T_\lambda^{(1)}(\psi_1)}\,d\lambda,\ \varphi_1(x),\ \psi_1(x)\in\Omega_{B_1}.$$

Из (8) и (17) для произвольных $\varphi_0,\ \psi_0\in\Omega_{B_0}$ и $\varphi_1,\ \psi_1\in\Omega_{B_1}$ имеет место равенство

$$\int_0^b \varphi_0(x)\,\overline{\psi_0}(x)\,dx + \int_M S_1^{-1}\varphi_1(x)\cdot\overline{S_1^{*-1}\psi_1(x)}\,dx =$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda^{(0)}(\varphi_0)\cdot\overline{T_\lambda^{(0)}(\psi_0)}\,d\rho_0(\lambda)+\int_M T_\lambda^{(1)}(\varphi_1)\cdot\overline{T_\lambda^{(1)}(\psi_1)}\,d\lambda. \tag{18}$$

Вводим следующие обозначения

$$H_0=U^{-1}h_0,\ H_1=U^{-1}h_1;$$

$$\Omega_{A_0}=U^{-1}\Omega_{B_0};\ \Omega_{A_1}=U^{*-1}\Omega_{B_1}. \tag{19}$$

Тогда легко проверяются следующие соотношения

$$H=H_0\oplus H_1 \tag{20}$$

$$AH_0\subseteq H_0;\ AH_1\subseteq H_1;\ A_0\Omega_{A_0}\subseteq\Omega_{A_0};\ A_1\Omega_{A_1}\subseteq\Omega_{A_1}; \tag{21}$$

где A_0 A_1 соответственно сужения оператора A на подпространствах H_0 и H_1.

Мы скажем $u_0^{(n)}\xrightarrow{\Omega_{A_0}}0$ $(u_1^{(n)}\xrightarrow{\Omega_{A_1}}0)$, $u_0^{(n)}\in\Omega_{A_0}$ $(u_1^{(n)}\in\Omega_{A_1})$, если $Uu_0^{(n)}\xrightarrow{\Omega_{B_0}}0$ $(U^*u_1^{(n)}\xrightarrow{\Omega_{B_1}}0)$ при $n\to\infty$.

Рассмотрим следующие вложения

$$\Omega_{A_0}\subset H_0\subset\Omega^*_{A_0};\ \Omega_{A_1}\subset H_1\subset\Omega^*_{A_1}. \tag{22}$$

Построим следующие системы функционалов

$$l_\lambda^{(0)}(u_0)=T_\lambda^{(0)}(Uu_0);\ l_\lambda^{(1)}(u_1)=T_\lambda^{(1)}(U^*u_1)\quad u_0\in\Omega_{A_0},\ u_1\in\Omega_{A_1}; \tag{23}$$

Легко проверить, что $l_\lambda^{(0)}\in\Omega^*_{A_0}$, $l_\lambda^{(1)}\in\Omega^*_{A_1}$.

Далее имеем

$$l_\lambda^{(0)}((A_0-\lambda I)u_0)=T_\lambda^{(0)}(U(A_0-\lambda I)U^{-1}Uu_0)=T_\lambda^{(0)}((B_0-\lambda I)Uu_0)=0, \tag{24}$$

$$l_\lambda^{(1)}((A_1-\lambda I)u_1)u_1)=T_\lambda^{(1)}(U^*(A_1-\lambda I)U^{*-1}U^*u_1)=T_\lambda^{(1)}(B_1^*-\lambda I)U^*u_1)=0.$$

$$u_0\in\Omega_{A_0},\ u_1\in\Omega_{A_1}. \tag{25}$$

То есть системы функционалов (23) являются системами собственных функционалов соответственно для операторов сужения A_0 и A_1.

Далее для произвольных элементов u_0, $v_0\in\Omega_{A_0}$ и u_1, $v_1\in\Omega_{A_1}$ выполняется равенство

$$\int_0^b Uu_0\overline{Uv_0}dx+\int_M S_1^{*-1}U^*u_1\overline{S_1^{*-1}U^*v_1}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} l_\lambda^{(0)}(u_0)\cdot\overline{l_\lambda^{(0)}(v_0)}d\rho(\lambda)+\int_M l_\lambda^{(1)}(u_1)\cdot\overline{l_\lambda^{(1)}(v_1)}d\lambda. \tag{26}$$

Таким образом установлена

Теорема. *Если оператор A из класса L, то существуют линейные топологические пространства Ω_{A_0}, Ω_{A_1}, инвариантные соответственно относительно сужений A_0, A_1 оператора A, так что эти операторы обладают полной системой собственных функционалов в соответствующих пространствах и имеет место формулы разложения* (26).

В заключение рассмотрим случай, когда $\sigma(x)\equiv x$. Тогда самосопряженная часть оператора B отсутствует и он оказывается вполне несамосопряженным, но подобным самосопряженному оператору ([5]). В этом случае оператор подобия S и его обратный пишутся в явном виде ([6])

$$S_1^{-1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(i+1)} \cdot \frac{d}{dx} \int\limits_0^x (x-t)^i f(t)\, dt, \tag{27}$$

$$S_1^{-1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-i+1)} \cdot \frac{d}{dx} \int\limits_0^b (x-t)^{-i} f(t)\, dt. \tag{28}$$

Множество M совпадает с отрезком $[0.b]$, а формула разложения (26) принимает вид

$$\int\limits_0^b S_1^{*-1} U^* u_1 \cdot S^{*}{}_1^{-1} U^* v_1\, dx = \int\limits_0^b l_\lambda^{(1)}(u_1) \cdot \overline{l_\lambda^{(1)}(v_1)}\, d\lambda; \; u_1,\ v_1 \in \Omega_{A_1}. \tag{29}$$

Ереванский государственный университет

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ

Ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների մի դասի սպեկտրալ վերլուծության մասին

Աշխատանքում դիտարկված է H սեպարաբել հիլբերտյան տարածության մեջ գործող, մեկ չափանի կեղծ մաս ունեցող զուտ անընդհատ սպեկտրով գծային սահմանափակ ոչ ինքնահամալուծ օպերատորների այսպես կոչված Մ. Ս. Լիֆշիցի L-դասը: Այդ դասին պատկանող օպերատորների համար ա-պացուցված է սեփական ֆունկցիոնալների լրիվ համակարգի գոյության վե-րաբերյալ թեորեմ, ինչպես նաև ստացված է ըստ սեփական ֆունկցիոնալ-ների սպեկտրալ վերլուծության բանաձև:

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Р. А. Александрян*, Докторская диссертация, МГУ, 1962. [2] *Р. А. Александрян*, ДАН Арм ССР, т. X, № 5 (1965. [3] *Р. А. Александрян*, ДАН СССР, т. 162, № 1 (1965). [4] *М. С. Лифшиц*, Матем. сб. 34 (76), 145—199 (1954). [5] *Ч. Фояш. Секефальви-Надь*, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, Изд. «Мир», М., 1970. [6] *Л. А. Сахнович*, УМН, т. XIII, вып. 4(82) (1958).