ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVIII 1979 1

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

Л. Г. Асатрян

О монотонных булевых функциях пересечений

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 30/VII 1978)

В данной работе рассматриваются системы подмножеств конечных множеств и исследуются всевозможные типы пересечений, порождаемых ими. Для заданных характеристических функций пересечений выясняются возможности их минимальных реализаций, то есть находятся множества минимальной мощности и такие системы подмножеств этих множеств, пересечения которых описываются данными характеристическими функциями.

Рассмотрим произвольное множество $S=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и систему F, состоящую из подмножеств $S_1, S_2, \ldots, S_n$ множества S. Рассмотрим произвольные подсистемы системы F, и представим их бинарными наборами длины n следующим образом. Если $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — упорядоченный набор нулей и единиц, и $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ все единичные значения набора α, то поставим в соответствие набору α подсемейства F_α, семейства F, состоящее из подмножеств $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$. Булеву функцию f, зависящую от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и равную единице на всех тех наборах α, для которых $\bigcap\limits_{j=1}^{k} S_{i_j}=\varnothing$, назовем характеристической булевой функцией пересечений системы F подмножеств S.

Таким образом, мы ввели ряд определений, являющихся прямыми обобщениями соответствующих определений графов пересечений ([1]), описывающих пересечения пар подмножеств системы подмножеств конечного множества. Поэтому некоторые вопросы, обсуждаемые нами вполне аналогичны соответствующим постановкам графов пересечений.

Прежде всего отметим специальный вид рассматриваемых функций пересечений. Они просто являются монотонными булевыми функциями, согласно тому, что удалив подмножество из пересекающейся системы множеств, мы всегда приходим к пересекающимся системам множеств.

Далее, естественно поставить вопрос о существовании для произвольной монотонной булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ конечного множества S и системы F его подмножеств таких, что функция f

является характеристической булевой функцией пересечений системы F. При этом понятно, что группы переменных, от которых функция f зависит одинаково, могло бы быть поставлено в соответствие одно и то же подмножество, и что при поглащении функцией f переменной x_i мы должны выбрать в качестве S_i пустое множество. Согласно с этим, в первом случае для нас особый интерес представляет такой выбор подмножеств S_i, в котором нет одинаковых элементов.

Наконец, в случае существования для данной монотонной функции (или для произвольной монотонной функции) множества S и системы F различных подмножеств $S, S_1, S_2, \ldots, S_m$ (за исключением пустых множеств) таких, что f является характеристической монотонной булевой функцией пересечений системы F, мы будем искать множество S минимальной мощности.

Обозначим через M_n класс всех монотонных булевых функций, зависящих от n переменных. Далее, пусть $V(f)$, $V(f) \subset E^n$, есть множество $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p\}$ всех верхних нулей функции f, $f \in M_n$, где $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in})$. Рассмотрим пару S и F и представим систему F в виде матрицы $\|a_{ij}\|$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, где столбцы этой матрицы представляют подмножества из F; $a_{ij} = 1$ тогда и только тогда, когда элемент $a_i \in S$ принадлежит подмножеству $S_i \in F$.

Теорема 1. *Для произвольного $f \in M_n$, существует такое конечное множество S и система F его различных подмножеств (за исключением пустых множеств), что функция f является характеристической функцией пересечений подмножеств множества S, принадлежащих F.*

Доказательство. Возьмем произвольную функцию f, $f \in M_n$. Пусть A_f матрица размерности $p \times n$, строками которой являются верхние нули функции f. В матрице A_f могут быть нулевые столбцы. Предположим, что ее последние k $(k < n)$ столбцы нулевые. Обозначим через A матрицу порядка $(p+n-k) \times n$, полученную из матрицы A_f добавлением строк $\beta_i = (\overbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}^{i}, 0, \ldots 0)$, $i = 1, 2, \ldots, n-k$.

Очевидно, что столбцы матрицы A различны (кроме нулевых столбцов) и что функция f описывает пересечения столбцов матрицы A. Теорема доказана.

Сейчас мы вправе ввести следующие определения. Обозначим через $S(f)$ минимальную мощность такого множества S, для которого существует система F его различных подмножеств, пересечения которых описываются функцией f. Далее пусть

$$S(n,p) = \max_{\substack{f \in M_n \\ |V(f)| = p}} S(f) \quad \text{и} \quad S(n) = \max_{f \in M_n} S(f).$$

Лемма 1. *В произвольной $(0,1)$-матрице размерности $p \times n$, с попарно несравнимыми строками, где* $\binom{k}{[k/2]} < p \leq \binom{k+1}{\left[\frac{k+1}{2}\right]}$,

$1 \leq k \leq n-1$ *существует по крайней мере* $k+1$ *попарно различных столбцов.*

Доказательство. Предположим, что существует (0,1)—матрица A_0 порядка $p \times n$ с попарно несравнимыми строками и всего лишь k_0, $k_0 < k+1$, попарно различными столбцами. Обозначим через B матрицу порядка $p \times k_0$, составленную из попарно различных столбцов матрицы A_0. Понятно, что строки матрицы B все еще останутся попарно несравнимыми, так как столбцы, удаленные из A_0 являются повторениями столбцов матрицы B.

А это означает, что в E^{k_0}, $k_0 \leq k$, существуют P, $P > \binom{k}{[k/2]}$, несравнимых элементов, что противоречит лемме Шпернера ([3]).

Отметим также, что в условиях леммы 1 легко построить матрицу, максимальное число различных столбцов которой равно $k+1$. Таким образом число $k+1$ наибольшее возможное в утверждении леммы 1.

Лемма 2. *Для каждой функции* f, $f \in M_{n-1}$ и $|V(f)|=p$, *можно построить функцию* φ, $\varphi \in M_n$ *и* $|V(\varphi)|=p$ *так, чтобы*

$$S(f) \leqslant S(\varphi).$$

Действительно, если A_f матрица порядка $p \times (n-1)$, строки которой являются верхними нулями функции f, то можно рассмотреть матрицу B порядка $p \times n$, получающуюся из матрицы A повторением некоторого столбца. Далее, если φ такая функция, что $A_\varphi = B$, то проверка соотношения $S(f) \leqslant S(\varphi)$ не представляет особого труда

Здесь же отметим, что исходя из данной матрицы A_f можно построитъ матрицу C, заменив нулевые столбцы A_f произвольными его другими столбцами. При этом, если ψ такая функция, которая задается матрицей C, то ясно, что $S(f) \leqslant S(\psi)$. Ниже мы будем пользоваться частным случаем этого замечания, когда $S(f)=S(n,p)$.

Теорема 2. $S(n,p) \geqslant S(n,p-1)$.

Доказательство. Докажем сначала следующее неравенство

$$S(n,p) \leqslant S(n-1,p)+1. \tag{1}$$

Рассмотрим функцию f такую, что $f \in M_n$, $|V(f)|=p$, $S(f)=S(n,p)$, и в матрице A_f нет нулевых столбцов, и если все столбцы различны, то $S(n,p)=S(f)=p$, а $S(n-1,p) \geqslant p$, так что (1) в этом случае удовлетворяется. Если в A_f имеются два одинаковых столбца, то удалив один из повторяющихся столбцов, мы приходим к матрице B порядка $p \times (n-1)$ с несравнимыми строками. Возьмем функцию φ, $\varphi \in M_{n-1}$, $|V(\varphi)|=p$, так, чтобы $A\varphi = B$. Так как $S(\varphi) \leqslant S(n-1,p)$ и $S(f) \leqslant S(\varphi)+1$, то $S(n,p) \leqslant S(n-1,p)+1$.

Теперь рассмотрим произвольную функцию f, $f \in M_{n-1}$, $|V(f)| = p-1$ и $S(f)=S(n-1,p-1)$. Возьмем матрицу A следующим образом

$$A=\begin{pmatrix} & & 0\\ & A_f & 0\\ & & \vdots\\ & & 0\\ 00\ldots0 & & 1\end{pmatrix}$$

и пусть A_f матрица порядка $(p-1)\times(n-1)$, строки которой являются верхними нулями функции f. Пусть φ есть такая функция, для которой $A_\varphi=A$. Ясно, что $|V(\varphi)|=p$ и $S(\varphi)=S(f)+1=S(n-1,p-1)+1$.

По определению имеем $S(n,p)\geqslant S(\varphi)=S(n-1,p-1)+1$. Объединив полученное с неравенством (1) получаем, что

$$S(n,p)\geqslant S(n-1,p-1)+1\geqslant S(n,p-1),$$

то есть утверждение теоремы.

Сделаем основные выводы из доказанных утверждений.

Следствие 1. Если $p>\binom{n-1}{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$, то $S(n,p)=p$.

Следствие 2. $S(n)=\binom{n}{[n/2]}$

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и Ереванского Государственного университета

Լ. Դ. ԱՍԱՏՐՅԱՆ

Հատումների մոնոտոն բուլյան ֆունկցիաների մասին

Աշխատանքը նվիրված է վերջավոր բազմության ենթաբազմությունների սիստեմների էլեմենտների հատումների նկարագրման ուսումնասիրությանը բուլյան ֆունկցիաների միջոցով։ Ապացուցված է, որ վերջավոր S բազմության ենթաբազմությունների կամայական $F=\{S_1,S_2,\ldots,S_n\}$ սիստեմի հատումների բուլյան ֆունկցիան մոնոտոն է՝ $f\in M_n$ և, որ կամայական $f\in M_n$ մոնոտոն ֆունկցիա հանդիսանում է ինչ որ S բազմության և համապատասխան F սիստեմի հատումների բուլյան ֆունկցիա։ Նշված դեպքերում F սիստեմի էլեմենտները, բացառությամբ դատարկ ենթաբազմության, ենթադրվում են իրարից տարբեր։

Ցույց է տրված, որ S բազմության մինիմալ հնարավոր հզորությունը, որի դեպքում նրա ենթաբազմությունների սիստեմների էլեմենտների հատումների բուլյան ֆունկցիաների բազմությունը իր մեջ ընդգրկում է M_n դասի բոլոր ֆունկցիաները, հավասար է $\binom{n}{[n/2]}$ թվին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *P. Erdős, A. Goodman, L. Posa*, Canad. J. Math., 18, 106–112 (1963). [2] Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, т. 1, М., „Наука", 1974. [3] *E. Sperner*, Math. Z., 27, 544–548 (1928).