ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. И. Лазарев, П. Н. Перлин

О решении задач пространственной теории упругости для кусочно-однородной среды

(Представлено чл.-корр АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 22/V 1978)

Метод потенциалов для первой внутренней (I^+) и второй внутренней (II^+) и внешней (II^-) задач теории упругости приводит к сингулярным интегральным уравнениям ([1]), при этом спектральные свойства уравнений позволяют находить решение методом последовательных приближений.

В настоящей работе исследуются уравнения для задачи II^+ в случае кусочно-однородной среды при совпадении коэффициентов Пуассона и доказывается сходимость метода последовательных приближений. Для численной реализации метода можно применять с естественными изменениями регулярные представления, предложенные в ([2]).

1. Пусть поверхность S_1 ограничивает тело, внутри которого имеется включение из другого материала, ограниченного поверхностью S_2 (S_1 и S_2 — ляпуновские поверхности).

Константы Ляме для D_2 ($\partial D_2 = S_2$) суть λ_2, μ_2 и для $D_1(\partial D_1 = S_1 \cup S_2) - \lambda_1$, μ_1.

Равенство коэффициентов Пуассона дает

$$\lambda_1/\lambda_2 = \mu_1/\mu_2 = k. \tag{1}$$

Пусть оператор T_{ix} оператор напряжений, определенный равенством

$$T_{ix}u(x) = 2\mu_i \frac{du}{dn} + \lambda_i n \operatorname{div} u + \mu_i [n \cdot \operatorname{rot} u] \tag{2}$$

здесь u — вектор смещений упругости среды. Из (1), (2), очевидно, имеем

$$T_{1x} = kT_{2x}.$$

Ставится задача: найти вектор смещении u при условии, что на поверхности S_1 заданы усилия

$$[T_{1x}u(x)]^+ = f(x); \quad x \in S_1,$$

а на поверхности S_2 условия сцепления

$$u^+(x)-u^-(x)=r(x)$$

$$[T_{2x}u(x)]^+-[T_{1x}u(x)]^-=\frac{1}{k}[T_{1x}u]^+-[T_{1x}u]^-=g(x);\quad x\in S_2$$

Индексы $+, -$ здесь означают, что предельное значение выражений берется соответственно изнутри и извне поверхности. Очевидно, один раз решая задачу I^+ (II^+), мы можем прийти к условиям, в которых $r(x)=0$ ($g(x)=0$). Для дальнейших целей нам удобно рассматривать задачу при $r(x)=0$. В силу сказанного, это не является принципиальным ограничением.

2. Будем искать решение в виде потенциала простого слоя

$$u(x)=\int\limits_{S_1}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)d_ys+\int\limits_{S_2}\Gamma(x-y)\varphi_2(y)d_ys$$

φ_i — плотность потенциала, распределенная на поверхности S_i ($i=1,2$).

$\Gamma(x-y)$ — тензор Кельвина — Сомильяны ([1]). В силу того, что $\Gamma(x-y)$ зависит только от коэффициента Пуассона — $u(x)$ представляет решение в обеих средах.

Рассмотрим условие на S_2. Первое условие выполняется автоматически в силу непрерывности потенциала простого слоя на поверхности S_2. Второе условие дает (нормаль здесь и далее подразумевается направленной вне D_1).

$$\varphi_2(x)+\int\limits_{S_2}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_2(y)d_ys+\int\limits_{S_1}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)d_ys+k\varphi_2(x)-$$

$$-k\int\limits_{S_2}T_{1x}\Gamma\varphi_2ds-k\int\limits_{S_1}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)ds=kg(x)$$

или $\left(\alpha=\dfrac{1-k}{1+k}\right)$

$$\varphi_2(x)+\alpha\int\limits_{S_2}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_2(y)d_ys+\alpha\int\limits_{S_1}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)d_ys=\frac{k}{k+1}g(x).$$

Для главной контактной задачи (поверхность S_1 отсутствует — тело заполняет все пространство). Это уравнение получено и исследовано в ([1]). При этом интеграл по S_1 отсутствует. Объединяя это уравнение с уравнением, полученным из условия на поверхности S_1, имеем систему

$$\varphi_1(x)-\int\limits_{S_1}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)d_ys+\int\limits_{S_2}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_2(y)d_ys=f(x),\quad x\in S_1$$

$$\varphi_2(x)+\alpha\int\limits_{S_2}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_2(y)ds+\alpha\int\limits_{S_1}T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi_1(y)d_ys=\frac{k}{k+1}g(x);\ x\in S_2 \tag{3}$$

Введем следующие обозначения:

$$K_{ji}\varphi = \int\limits_{S_i} T_{1x}\Gamma(x-y)\varphi(y)ds, \quad x\in S_j, \quad K^*_{ji}\psi = \int\limits_{S_j} [T_{1y}\Gamma(x-y)]'\psi(y)d_ys, \quad x\in S_i$$

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \alpha K_{21} & \alpha K_{22} \end{pmatrix}; \quad T_1 = T; \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} f \\ \dfrac{k}{k+1}\ g \end{pmatrix}$$

H_i—гильбертово пространство функций, определенных на S_i;

$H = H_1 \times H_2$ — произведение пространств.

Пусть g_i, $\varphi_i \in H_i$; $\varphi = (\varphi_1; \varphi_2)$; $g = (g_1; g_2)$, тогда

$$(\varphi_i, g_i)_{H_i} = \int \varphi_i g_i ds; \quad (\varphi, g)_H = (\varphi_1, g_1)_{H_1} + (\varphi_2, g_2)_{H_2}$$

$R(A)$ — область значения оператора A;
$N(A)$ — подпространство нулей оператора A;
$\sum(A)$ — спектральное множество A;
$\rho(A)$ — спектральный радиус A.

Уравнения (3) в операторном виде запишутся

$$\varphi + T_\alpha\varphi = F. \tag{3^1}$$

При $\alpha = 1$ уравнение (3^1) совпадает с уравнением задачи II для двусвязного тела, ограниченного поверхностями S_1 и S_2.

3. Займемся исследованием полученных уравнений. Нам потребуется еще уравнение, сопряженное (3^1)

$$\psi + T^*_\alpha\psi = 0, \tag{4}$$

где

$$T^*_\alpha = \begin{pmatrix} K^*_{11} & \alpha K^*_{21} \\ K^*_{12} & \alpha K^*_{22} \end{pmatrix}.$$

3.1. Покажем, что уравнение (3^1) нормально разрешимо и его индекс равен нулю.

Для этого подействуем на оператор $I + I_\alpha$ оператором

$$B = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & (I + \alpha K_{22})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Это преобразование эквивалентно. Действительно, поскольку $\rho(K_{22}) = 1$ норму $\| \ \|_*$ всегда можно выбрать такой, что для любого $\varepsilon > 0$ будет $1 \leq \| K_{22} \|_* \leq 1 + \varepsilon$, при этом $\| \ \|_*$ эквивалентна исходной норме [4].

Кроме того, очевидно, при любом $k \neq 0$ $|\alpha| < 1$. Таким образом, при любом k существует эквивалентная исходной норме норма, такая, что

$$\alpha \| K_{22} \|_{\circ} < 1$$

и оператор B дает эквивалентное преобразование. Итак,

$$B(I + T_{\alpha})\varphi = \varphi_1 + K_{11}\varphi_1 + \alpha K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1} K_{21}\varphi_1.$$

Оператор $K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1} K_{21}$ вполне непрерывен. Поскольку таковым является K_{12}.

Нормальная разрешимость уравнения с оператором $B(I + T_{\alpha})$ следует из нормальной разрешимости уравнения с оператором $I + K_{11}$ ([1]). Кроме того, поскольку индекс $I + K_{11}$ равен нулю, также заключаем, что индекс оператора $B(I + T_{\alpha})$ равен нулю.

Поскольку оператор B задает эквивалентное преобразование, этими свойствами обладает исходное уравнение.

3.2. Определим теперь собственные функции T^{*}_{α}.

Пусть $\Psi(x) = a + [b \times x]$, а $\psi_i(x) = \Psi(x)$ при $x \in S_i$; подстановкой в (4), пользуясь свойствами потенциала двойного слоя ([1]), с учетом выбранного направления нормали, убеждаемся, что вектор $\Psi_{\alpha}(x) = \left(\psi_1; \frac{2}{1+\alpha} \psi_2 \right)$ является собственной функцией оператора T^{*}_{α}.

Покажем, что шесть функций $\Psi_{\alpha}(x)$, определяемые векторными константами a, b, образуют полный набор собственных функций оператора T^{*}_{α}, соответствующих собственному числу -1.

Покажем предварительно, что $\| T_{\alpha} \| \leqslant \| T \|$. Действительно, для любого $F = (F_1; F_2) \in H$ имеем $(|\alpha| < 1)$

$$\| T_{\alpha} F \|_H = \| K_{11} F_1 + K_{12} F_2 \|_{H_1} + \| K_{22} F_2 + K_{21} F_1 \|_{H_2} \cdot |\alpha| \leqslant \| TF \|_H.$$

В уравнении

$$\varphi + T_{\alpha}\varphi = F; \quad F = \left(f; \frac{k}{k+1} g \right) \tag{5}$$

произведем замену $(\varphi_1; \varphi_2) \to \left(\varphi_1; \varphi_2 + \frac{k}{k+1} (I + \alpha K_{22})^{-1} g \right)$.

Система (5) перейдет при этом в систему

$$\varphi_1 + K_{11}\varphi_1 + K_{12}\varphi_2 = f_1 = f - \frac{k}{k+1} K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1} g,$$

$$\varphi_2 + K_{22}\varphi_2 + K_{21}\varphi_1 = 0; \tag{6}$$

При этом

$$(f_1, \psi_1)_{H_1} = (f, \psi_1)_{H_1} - \frac{k}{k+1} (\psi_1, K_{12}(I + \alpha K_{22})^{-1} g)_{H_1} = \tag{7}$$

$$= (f, \psi_1)_{H_1} + \frac{k}{k+1} \left(g, \frac{2}{1+\alpha} \psi_2 \right)_{H_2} = (F, \Psi)_H$$

Здесь использовались следующие равенства

$$K_{12}^{*}\psi_2 = -2\psi_2;\ K_{21}^{*}\psi_2 = \psi_2$$

и сходимость по норме ряда $\sum_{0}^{\infty} \alpha^n K_{22}^n g$. Для пояснения знака во втором равенстве напомним, что нормаль на поверхности направлена внутрь тела D_2.

Очевидно, что из разрешимости (6) следует разрешимость (5). Покажем теперь, что условие $(f_1, \psi_1) = 0$ достаточно для разрешимости (6). Отсюда, очевидно, будет следовать, что условия

$$(F, \Psi)_H = (f, \psi_1) + \left(\frac{k}{k+1} g, \frac{2}{1+\alpha} \psi_2\right)_{H_1} = (f, \psi_1)_H + k(g, \psi_2)_{H_1} = 0 \qquad (8)$$

достаточны для разрешимости (5) и в силу нормальной разрешимости уравнения получим наше утверждение.

Отметим еще, что последнее равенство в (6) означает равенство нулю главного вектора и главного момента, приложенных к телу D_1, и как показано в (1), является достаточным условием разрешимости поставленной задачи теории упругости.

Рассмотрим пространство $\bar{H} = \{\varphi : (\varphi_1, \psi_1)_{H_1} = (\varphi_2, \psi_2)_{H_1} = 0\}$. Очевидно, $\bar{H} \subset R(I + I_\alpha) = {}^{\perp}N(I + T_\alpha^*) = \left\{\varphi : (\varphi_1, \psi_1) + \dfrac{2}{1+\alpha}(\varphi_2, \psi_2) = 0\right\}$. Легко проверить, что $T_\alpha \bar{H} \subset \bar{H}$ при всех $\alpha \in (0, 1]$.

Будем рассматривать сужение оператора T_α на $\bar{H}$ и обозначим это сужение $\bar{T}_\alpha$.

Покажем, что $-1, 1 \bar{\in} \sum(\bar{T})$. Если $-1 \in \sum(\bar{T})$, то $\varphi \in \bar{H} \subset R(I + T)$ и одновременно $\varphi \in N(I + T)$ и в силу простоты полюса резольвенты оператора (отсутствие присоединенных собственных функций см. ([1])) $\varphi = 0$.

Пусть $+1 \in \sum(\bar{T})$. Легко проверить, что собственными функциями уравнения $-\psi + T^*\psi = 0$ являются $(0; \psi_{2j})$ $(i = 1, 2, \ldots 6)$ и только они. Действительно, подстановкой убеждаемся, что эти функции являются собственными.

Кроме того, в силу теоремы единственности собственными функциями для задачи I могут быть только векторы жесткого смещения, т. е. всего 6 линейно независимых векторов.

Далее имеем, очевидно, $\bar{H} \subset {}^{\perp}N(-I + T^*) = \{\varphi : (\varphi_2, \psi_{2j}) = 0\}$. Тогда, если $\varphi \in \bar{H}$ и $\varphi \in N(-I + T)$, то в силу простоты полюса $\lambda = 1$, $\varphi = 0$.

Итак $1 \bar{\in} \sum(\bar{T})$.

Известно, что $\sum(T)\in[-1, 1]$. Кроме того, $\sum(T)$ дискретен. Отсюда теперь следует $\rho(\bar{T})<1$. И, следовательно, существует норма, эквивалентная исходной, в которой $\|\bar{T}\|_* = q<1$.

Имеем теперь при $F\in\bar{H}$ и при любом целом $n>0$

$$\|T_0^n F\| \leqslant \|T T_0^{n-1} F\|_{\bar{H}} \leqslant \ldots \leqslant \|T^n F\|_{\bar{H}} \leqslant c_1 \|T^n F\|_* \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \|T^n\|_* \|F\|_* \leqslant c_1 q^n \|F\|_*.$$

Здесь c_1—константа, входящая в условие, выражающее эквивалентность норм. Из последнего неравенства следует, что при любом $F\in\bar{H}$ решение существует и представляется рядом

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} T_0^n F.$$

Итак, условие $(f_1, \psi_1)=0$ достаточно для разрешимости (8), и, следовательно, (5), а значит в силу нормальной разрешимости (5) наше утверждение доказано.

Попутно мы показали сходимость метода последовательных приближений для уравнения (3).

4. Все изложенное с очевидными модификациями может быть применено к задаче I^+ для кусочно-однородной среды с совпадающими коэффициентами Пуассона.

5. Если в постановке задачи принять $T_1=T_2=d/dn$, $\Gamma(x-y) = 1/(x-y)$; u, φ, f—скалярные функции, придем к задаче Неймана для оператора Лапласа, для составной области с заданным скачком градиента на границе. Результаты справедливы и в этом случае.

НИИ СП им. Н. В. Склифосовского

Մ. Ի. ԼԱԶԱՐԵՎ, Պ. Ի. ՊԵՐԼԻՆ

Կտոր առ կտոր համասեռ միջավայրի առաձգականության տեսության տարածական խնդրի լուծման մասին

Հոդվածում ուսումնասիրվում է առաձգականության տեսության տարածական խնդրի լուծման սինգուլյար հավասարումները, որոնք ստացված են պոտենցիալի մեթոդով, միևնույն Պուասոնի գործակցով, կտոր առ կտոր համասեռ միջավայրի համար։

Ապացուցվում է ստացված հավասարումների լուծելիությունը և հավասարումների ինդեքսի զրո լինելու փաստը։ Համալուծ հավասարումների սիստեմի համար գտնված են սեփական ֆունկցիաները և ապացուցված է Նեյմանի շարքի զուգամիտությունը, երբ հավասարման աջ մասը բավարարվում է լուծելիության այն պայմաններին, որոնք պահանջում են Ֆրեդհոլմի տեսության հիման վրա։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. Д. Купрадзе* и др., Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости, «Наука». М., стр. 660, 1976. [2] *П. И. Перлин*, ПММ. т. 40, вып. 2 (1976). [3] *С. Г. Крейн*, Линейное уравнение в банаховом пространстве, «Наука», стр. 103, М., 1971. [4] *М. А. Красносельский* и др., Приближенное решения операторных уравнений, стр. 453, «Наука». М., 1969.