

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Г. А. Барсегян

О дефектах и росте мероморфных функций конечного нижнего порядка
 (Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 20/X 1978)

1. В 1939 г. Тейхмюллер обнаружил ⁽¹⁾, что для некоторых классов мероморфных функций, помимо соотношения дефектов $\sum_{(a)} \delta(a) \leq 2^*$ выполняется также соотношение $\sum_{(a)} \delta^{1/2}(a) < \infty$. Хейман показал ⁽²⁾, что для мероморфной в $|z| < \infty$ функции конечного нижнего порядка ряд $\sum_{(a)} \delta^{1/\beta-1}(a)$ может расходиться, если $\epsilon > 0$. Усиливая результаты ряда работ (обзор их см. в ⁽¹⁾), Вейцман доказал ⁽³⁾, что для мероморфной в $|z| < \infty$ функции конечного нижнего порядка ряд $\sum_{(a)} \delta^{1/\beta}(a)$ сходится. Поскольку показатель $\frac{1}{3}$ не может быть уменьшен, результат Вейцмана имеет окончательный характер.

В ряде работ В. П. Петренко изучает распределение величин

$$\beta(a) = \beta(a, w) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z|=r} \ln \frac{1}{|w(z) - a|}}{T(r)}$$

$$\beta(\infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z|=r} \ln |w(z)|}{T(r)}$$

для мероморфных в $|z| < \infty$ функций $w(z)$. Величины $\beta(a)$ характеризуют минимальное отклонение $w(z)$ от a , в то время как $\delta(a) =$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ \frac{1}{|w(re)^{1/\epsilon} - a|} d\varphi}{T(r)}$$

характеризуют среднее отклонение $w(z)$ от a .

* Мы пользуемся стандартными в теории распределения значений обозначениями ⁽²⁾.

В частности В. П. Петренко получил ⁽³⁾ следующий результат, который мы приводим здесь в удобном для нас компактном виде: Для мероморфной в $|z| < \infty$ функции нижнего порядка $\lambda, (0 < \lambda < \infty)$ и $\varepsilon, (0 < \varepsilon < 1)$ справедлива оценка

$$\sum \frac{\beta^{1/2}(a)}{\ln^{1/2+\varepsilon} \frac{1}{\beta(a)}} < \infty.$$

Он также показал, что ряд $\sum_{(a)} \beta^{1/2-\varepsilon}(a)$ может расходиться, если $\varepsilon > 0$.

Вопрос о сходимости ряда $\sum_{(a)} \beta^{1/2}(a)$ до сих пор оставался открытым.

Пользуясь методами доказательства теорем, анонсированных в ⁽⁶⁾ и теорией поверхностей наложения Л. Альфорса, нами получен результат, из которого следует сходимость ряда $\sum_{(a)} \beta^{1/2}(a)$ и одновременно ряда $\sum_{(a)} \delta^{1/3}(a)$.

Теорема 1. Пусть $w(z)$ мероморфная в $|z| < \infty$ функция конечного нижнего порядка λ ; $a_i \in \mathbb{C}, (i=1, 2, \dots, q)$ — конечный набор попарно различных комплексных значений; $\beta(a_i) > 0, (i=1, 2, \dots, q)$; 2ρ — минимальное расстояние между точками a_i ; J_i — тот из интервалов $\varphi_i < \varphi < \varphi_i$, в котором $|w(re^{i\varphi}) - a_i| < \min(\rho, 1)$ и в котором достигается $\max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a_i|}$; $|J_i| = \varphi_i - \varphi_i$. Тогда существует такая постоянная K , зависящая только от λ . ($K < \infty$ при $\lambda < \infty$), что неравенство

$$\sum_{i=1}^q \frac{\max_{|z|=r} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a_i|}}{|J_i|} \leq K T(r) \quad (1)$$

выполняется на некотором неограниченном множестве значений r . Из (1) и неравенства Коши-Буняковского вытекает

Следствие 1. Для мероморфной в $|z| < \infty$ функции конечного нижнего порядка выполняется

$$\sum_{(a)} \beta^{1/2}(a) < \infty.$$

Пусть $m_i(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{J_i} \ln^+ \frac{1}{|w(z) - a_i|} d\varphi$, где $J_i = \{z: |z| = r, |w(z) - a_i| \leq \min(\rho, 1)\}$; $|J_i|$ — мера J_i очевидно $m(r, a) = m_i(r, a) + 0$ (1)

$$и \frac{m(r, a_i) + O(1)}{|J_i|^2} \leq \frac{m_p(r, a_i)}{|J_i| |J_i|} \leq \frac{\max_{|z|=r} \ln \frac{1}{|\omega(z) - a_i|}}{|J_i|}$$

Теперь из (1) и (2) и неравенства Гёльдера вытекает Следствие 1 (Вейцман). Для мероморфной $b|z| < \infty$ функции конечного нижнего порядка выполняется

$$\sum_{(a)} \delta^{1/3}(a) < \infty.$$

11. В сборнике нерешенных задач Хеймана (7) приводится следующий вопрос Винклера: Пусть $w(z)$ — целая функция (достаточно большого порядка) с $n \geq 2$ разными асимптотическими значениями $a_k, (k=1, 2, \dots, n)$, Γ_k — асимптотическая линия, на которой $w(z) \rightarrow a_k$, $n(r, a_k, \Gamma_k)$ — количество a_k — точек, лежащих на Γ_k и в $|z| \leq r$.

1) Можно ли найти такую функцию, что $b_k \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a_k, \Gamma_k)}{n(r, a_k)} > 0$ для $k=1, 2, \dots, n$ 2) Можно ли взять $b_k = 1, k=1, 2, \dots, n$.

Вопрос 1 и 2 можно образно перефразировать так; может ли на Γ_k лежать „достаточно много“ a_k — точек и может ли на Γ_k лежать „подавляющее большинство“ a_k — точек для $k=1, 2, \dots, n$.

Как сообщил мне А. А. Гольдберг, ответ на первый вопрос положителен. Следствие 2 из нашей теоремы 2 дает ответ на второй вопрос.

Теорема 2. Пусть $w(z)$ — мероморфная $|z| < \infty$ функция, $L_k (k=1, 2, \dots, n)$ — неограниченные односвязные области, такие, что $w(z) \rightarrow a_k$ при $|z| \rightarrow \infty$ и $z \in L_k$, $n(r, a_k, L_k)$ — количество a_k — точек в $L_k \cap \{|z| \leq r\}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a_k, L_k)}{n(r, a_k)} \leq 2.$$

Если дополнительно предположить, что функция $w(z)$ — целая, то

$$\sum_{k=1}^n \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, a_k, L_k)}{n(r, a_k)} \leq 1.$$

Следствие 2. Для мероморфной $b|z| < \infty$ функции $w(z)$ выполняется

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq 2.$$

Для целой функции $w(z)$ выполняется

$$\sum_{k=1}^n b_k \leq 1.$$

Последнее неравенство и содержит ответ на второй вопрос Винклера.

показывая, что для целой функции существует не более, чем одно значение, для которого $h_k=1$.

Институт математики Академии
наук Армянской ССР

Դ. Ա. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

Վերջավոր ստորին կարգ ունեցող մերոմորֆ ֆունկցիաների
դեֆեկտների և ածի մասին

Հայտնի է (Վ. Պետրենկո⁽¹⁾), որ վերջավոր ստորին կարգ ունեցող
մերոմորֆ $|z| < \infty$ — ում $\omega(z)$ ֆունկցիայի համար

$$\sum_{(a)} \frac{\delta^{1/2}(a)}{\ln^{1/2+} \frac{1}{\delta(a)}} < \infty,$$

$$\text{որտեղ } \delta(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z|=r} \ln \frac{1}{|\omega(z-a)|}}{T(z)}, \quad 0 < \varepsilon < 1:$$

Այստեղ կոդից⁽²⁾ աճեն մի ε — ի համար $(0 < \varepsilon < 1)$ կարելի է բերել ար
դասից ֆունկցիայի օրինակ, որի համար $\sum_{(a)} \delta^{1/2-\varepsilon}(a)$ տարամետ է:

$\sum_{(a)} \delta^{1/2}(a)$ — ի դուգամիտություն հարցը մինչև հիմա բաց էր: Եներկա աշ
խատանքում բերվում է մի արդյունք, որից բխում է ոչ միայն $\sum \delta^{1/2}(a)$
չարքի դուգամիտությունը $\omega(z)$ ֆունկցիայի համար, այլ նաև վելց
մանի հայտնի արդյունքը — $\sum \delta^{1/2}(a)$: Երկրորդ մասում բերվում է
Վինկլերի մի հարցադրման սխառասխանը (այդ հարցադրումը բերված է ՈՒ
Հեյմանի չլուծված խնդիրների ցուցակում⁽³⁾):

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ O. Teichmüller, „Deutsche Math.“ 4, 163—190 (1939). ² Մ. Հրիման, Мероморф
ные функции, изд. Мир (1966). ³ А. А. Голдберг, „Математический анализ“, т. 1
(1973) ⁴ A. Weitzman, Acta mathematica, 128, 1—2, 41—53 (1972). ⁵ В. И. Петренко
„Известия АН СССР“, серия матем., т. 33, № 2 (1989) ⁶ Г. А. Барсегян, ДАН СССР
т. 238, № 4 (1978) ⁷ W. K. Hayman, New problems, Cambridge University Press
155—180, 1974.