ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 5

УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

Ю. М. Мовсисян

О группах полулинейных преобразований

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 6/X 1978)

Полулинейные преобразования впервые рассматривались в работах Сегре для линейных пространств.

В дальнейшем, с одной стороны изучались группы (и полугруппы) полулинейных преобразований линейных пространств, модулей и близких к ним алгебр, а с другой—категории полулинейных соответствий (вычисляются радикалы, многообразия и бимногообразия в таких категориях).

В работе ([1]) рассматриваются некоторые вопросы общей теории полулинейных соответствий в рамках универсальных алгебр. Заметим еще следующий факт. Как отмечает А. И. Мальцев ([2]) детальная разработка теории языка второй ступени представляется одной из центральных задач алгебры и логики. А при исследовании выполнимости формул второй ступени, как правило, возникают алгебры (или модели) с разными системами операций (предикатов). Иначе говоря, формулы второй ступени порождают многообразия, или аксиоматизируемые классы алгебр (моделей) с разными системами операций (предикатов). Здесь возникают морфизмы—как пары согласованных отображений (полулинейные соответствия универсальных алгебр и моделей).

Известно, что группа полулинейных преобразований линейного пространства расщепляема. Это замечание Бэра остается в силе для любых свободных (в категории полулинейных соответствий) алгебр, а также и для их производных алгебр. Более того, этот факт справедлив для любых универсальных алгебр, обладающих (в категории полулинейных соответствий) базой в смысле Марчевского (а также и для их производных алгебр). Иначе говоря, группа $\mathrm{Aut}M$ полулинейных преобразований обладает полупрямым разложением:

$$\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M\leftthreetimes H,$$

где $\mathrm{Aut}^{0}M$—группа линейных преобразований (т. е. группа обычных автоморфизмов!). Однако вопрос о прямом разложении

$$\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M\times H$$

остается еще не исследованным.

Полулинейное преобразование модуля $M=\langle Q(+); R(+,\cdot)\rangle$ определяется как пара $(\varphi, \bar{\psi})$ отображений $\varphi\in \mathrm{Aut}Q$, $\bar{\psi}\in \mathrm{Aut}R$ с условием

$$\varphi(\alpha\cdot x)=\bar{\psi}(\alpha)\cdot\varphi(x)$$

для любых $x\in Q$, $\alpha\in R$.

Множество всех полулинейных преобразований модуля M образует группу $\mathrm{Aut}M$. Полулинейные преобразования вида $(\varphi, \bar{\varepsilon})$, где $\bar{\varepsilon}$ — тождественное отображение, образуют группу $\mathrm{Aut}^{(0)}M$. Это есть группа линейных преобразований модуля M и

$$\mathrm{Aut}^{(0)}M\leqslant|\mathrm{Aut}M.$$

Если свободный модуль M определен над кольцом R со свойством $\mathrm{Aut}R\neq(\bar{\varepsilon})$, то $\mathrm{Aut}M\neq\mathrm{Aut}^{(0)}M$ и справедливо равенство

$$\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M\rtimes\mathrm{Aut}R.$$

Для одного класса циклических модулей сформулируем следующий результат.

П р е д л о ж е н и е. Если аддитивная часть модуля M есть циклическая группа и каждый ее ненулевой элемент обладает нулевым аннулятором, то $\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M=\langle Q(+); R(+;\cdot)\rangle$, $\mathrm{Ann}(x)=0$ для любого $x\in Q$, $x\neq0$ и $a\in Q$ — образующий элемент. Если $(\varphi,\bar{\psi})\in\mathrm{Aut}M$, то для любых ненулевых $y\in Q$ и $r\in R$ имеем

$$y=ma,$$
$$ra=na,$$
$$\varphi a=la,$$

$$\varphi(ry)=\varphi[r(ma)]=\varphi[m(ra)]=\varphi(mna)=mn\varphi a=mnla=mlna=mlra=rmla,$$

где $m,n,l\in Z$. Одновременно:

$$\varphi(ry)=\bar{\psi}r\varphi y=\bar{\psi}r\varphi(ma)=\bar{\psi}r(m\varphi a)=\bar{\psi}rmla,$$

и потому

$$rmla=\bar{\psi}rmla,$$

$$(r-\bar{\psi}r)mla=0.$$

Если циклическая группа $Q(+)$ бесконечна, то $mla\neq0$ и, следовательно, $r=\bar{\psi}r$. Если же циклическая группа $Q(+)$ — конечного порядка $|Q|=s$, то нетрудно заметить, что НОД $(s,l)=1$. Следовательно и здесь $mla\neq0$, поскольку $m<s$. Таким образом $\bar{\psi}=\bar{\varepsilon}$.

С л е д с т в и е 1. Если аддитивная часть модуля M есть бесконечная циклическая группа и некоторый ее элемент обладает нулевым аннулятором, то $\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M$.

С л е д с т в и е 2. Если аддитивная часть модуля M есть циклическая группа простого порядка и некоторый ее элемент обладает нулевым аннулятором, то $\mathrm{Aut}M=\mathrm{Aut}^{(0)}M$.

Будем говорить, что группа $\mathrm{Aut}^{(0)}M$ обладает нормальным дополнением, если она обладает дополнением в решетке всех нормальных подгрупп группы $\mathrm{Aut}M$. Иначе говоря, группа H является нормальным дополнением группы $\mathrm{Aut}^{(0)}M$, если и только если:

$$H \trianglelefteq \mathrm{Aut}M,\quad \mathrm{Aut}M = H \cdot \mathrm{Aut}^{(0)}M,\quad H \cap \mathrm{Aut}^{(0)}M = (\varepsilon)$$

Каждое нормальное дополнение группы $\mathrm{Aut}^{(0)}M$, для свободного модуля M (определенного над кольцом R), изоморфно группе $\mathrm{Aut}R$.

Лемма. *Для линейного пространства M, определенного над телом F, группа $\mathrm{Aut}^{(0)}M$ не обладает нетривиальным нормальным дополнением.*

Если H—нормальное дополнение группы $\mathrm{Aut}^{(0)}M$ и $(\varphi, \bar{\psi}) \in H$, то для любого линейного преобразования вида

$$\varphi^{\lambda}(x) = \lambda x,\quad \lambda \in F$$

справедливо равенство

$$\varphi\varphi^{\lambda} = \varphi^{\lambda}\varphi;$$

Откуда и вытекает равенство $\bar{\psi}\lambda = \lambda$ для любого $\lambda \in F$.

Для каждого автоморфизма $\bar{\psi} \in \mathrm{Aut}F$ определим морфизм $\varphi_{\bar{\psi}} \in \mathrm{Aut}Q$ по правилу:

$$\varphi_{\bar{\psi}}(x) = \bar{\psi}(\xi_1)e_1 + \ldots + \bar{\psi}(\xi_n)e_n,$$

где $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$ и совокупность $\{e_i\}_{i \in I}$—база.

Теорема. *Пусть пространство M определено над полем и группа ее линейных преобразований совпадает с группой всех подобий. Если*

$$\mathrm{Aut}M \simeq \mathrm{Aut}^{(0)}M \times G$$

для некоторой нетривиальной группы G, то существует нетривиальная группа H такая, что

$$\mathrm{Aut}^{(0)}M \simeq \mathrm{Aut}^{(0)}M \times H.$$

Доказательство. По предположению существуют нормальные подгруппы $\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M} \trianglelefteq \mathrm{Aut}M$ и $\bar{G} \trianglelefteq \mathrm{Aut}M$ такие, что $\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M} \simeq \mathrm{Aut}^{(0)}M$, $\bar{G} \simeq G$, $\bar{G} \cap \overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M} = (\varepsilon)$, $\mathrm{Aut}M = \bar{G} \cdot \overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$.

Можно предполагать, что:

$$\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M} = \{\varphi^{\lambda_1}, \ldots, \varphi^{\lambda_i}, \ldots, (\varphi_1, \bar{\psi}_1), \ldots, (\varphi_j, \bar{\psi}_j), \ldots\},$$

$$\bar{G} = \{\varphi^{\lambda^{(1)}}, \ldots, \varphi^{\lambda^{(i)}}, \ldots, (\varphi^{(1)}, \bar{\psi}^{(1)}), \ldots, (\varphi^{(j)}, \bar{\psi}^{(j)}), \ldots\}.$$

Сперва покажем, что каждое линейное преобразование φ^{λ}, $\lambda \neq 0$, обладает представлением

$$\varphi^{\lambda} = \varphi^{\lambda_i} \cdot \varphi^{\lambda^{(i)}},\ \text{где}\ \varphi^{\lambda_i} \in \overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M},\ \varphi^{\lambda^{(i)}} \in \bar{G}.$$

Разберем все четыре возможные случая:

$$1.\ \varphi^{\lambda}=\varphi^{\lambda_i}\cdot(\varphi^{(l)},\bar{\psi}^{(l)}),$$

$$2.\ \varphi^{\lambda}=(\varphi_j,\bar{\psi}_j)\cdot\varphi^{\lambda(s)},$$

$$3.\ \varphi^{\lambda}=(\varphi_j,\bar{\psi}_j)\cdot(\varphi^{(l)},\bar{\psi}^{(l)}),$$

$$4.\ \varphi^{\lambda}=\varphi^{\lambda_i}\cdot\varphi^{\lambda(s)};$$

Первые два случая с очевидностью отпадают. Покажем, что третий случай также не реален. Если

$$\varphi^{\lambda}=(\varphi_j,\bar{\psi}_j).(\varphi^{(l)},\bar{\psi}^{(l)}),$$

то $\bar{\psi}^{(l)}=\bar{\psi}_j^{-1}$ и $([\varphi^{(l)}]^{-1},\bar{\psi}_j)\in\bar{G}$. Поскольку $(\varphi_j,\bar{\psi}_j)\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$, то

$$(\varphi^{\lambda},\bar{\varepsilon})(\varphi_j,\bar{\psi}_j)(|\varphi^{\lambda}|^{-1},\bar{\varepsilon})=$$

$$=(\varphi^{\lambda}\varphi_j(\varphi^{\lambda})^{-1},\bar{\psi}_j)=(\varphi^{\lambda}\varphi_j\varphi^{\lambda^{-1}},\bar{\psi}_j)=(\varphi_j\varphi^{\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda},\bar{\psi}_j)\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$$

и следовательно, $\varphi^{\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda}\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$.

Аналогичным путем, исходя из условий $([\varphi^{(l)}]^{-1},\bar{\psi}_j)\in\bar{G}$, $\lhd\,\mathrm{Aut}M$, получаем $\varphi^{\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda}\in\bar{G}$.

Таким образом,

$$\varphi^{\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda}\in\bar{G}\cap\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$$

и потому

$$\varphi^{\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda}=\varepsilon,$$

$$\lambda^{-1}\bar{\psi}_j\lambda=1$$

$$\bar{\psi}_j\lambda=\lambda,$$

т. е. $\bar{\psi}_j=\bar{\varepsilon}$. Противоречие!

Теперь мы заключаем:

$$\varphi^{\lambda}=\varphi^{\lambda_i}\cdot\varphi^{\lambda(s)},$$

где

$$\varphi^{\lambda_i}\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M},\ \varphi^{\lambda(s)}\in\bar{G}.$$

Далее устанавливается, что все элементы группы $\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$ являются на самом деле линейными преобразованиями, т. е. если

$$(\varphi_j,\bar{\psi}_j)\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M},\ \text{то}\ \bar{\psi}_j=\bar{\varepsilon}.$$

Для $\lambda\neq0$, если $\varphi^{\lambda}\in\overline{\mathrm{Aut}^{(0)}M}$, то

$$\varphi^{\lambda}\varphi_j=\varphi_j\varphi^{\lambda},$$

$$\varphi_j(\lambda x) = \varphi^{\lambda}(\varphi_j x),$$

$$\bar{\psi}_j(\lambda)\varphi_j x = \lambda\varphi_j x,$$

$$\bar{\psi}_j(\lambda) = \lambda.$$

Если же $\varphi^{\lambda} \in \bar{G}$, то

$$(\varphi_j, \bar{\psi}_j)\,\varphi^{\lambda}\,(\varphi_j^{-1}, \bar{\psi}_j^{-1}) = \varphi_j\,\varphi^{\lambda}\,\varphi_j^{-1} \in \bar{G}.$$

С другой стороны, существует линейное преобразование φ^{γ}, $\gamma \neq 0$, такое, что

$$\varphi_j = \varphi_{\bar{\psi}_j} \cdot \varphi^{\gamma}.$$

Следовательно, если $\varphi^{\lambda} \in \bar{G}$, то

$$\varphi_{\bar{\psi}_j}\,\varphi^{\gamma}\varphi^{\lambda}(\varphi^{\gamma})^{-1}\varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} = \varphi_{\bar{\psi}_j}\,\varphi^{\lambda}\,\varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} = \varphi^{\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda)} \in \bar{G}.$$

Одновременно, из соотношения $(\varphi_j, \bar{\psi}_j) \in \overline{\mathrm{Aut}^{(0)} M}$ следует

$$\varphi^{\lambda} \cdot (\varphi_j, \bar{\psi}_j) \cdot \varphi^{\lambda^{-1}} = (\varphi^{\lambda}\varphi_{\bar{\psi}_j}\,\varphi^{\gamma}\varphi^{\lambda^{-1}}, \bar{\psi}_j) \in \overline{\mathrm{Aut}^{(0)} M},$$

$$\varphi^{\lambda}\varphi_{\bar{\psi}_j}\varphi^{\gamma}\varphi^{\lambda^{-1}}\varphi^{\gamma^{-1}}\varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} = \varphi^{\lambda}\varphi_{\bar{\psi}_j}\varphi^{\lambda^{-1}}\varphi_{\bar{\psi}_j}^{-1} = \varphi^{\lambda\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda^{-1})} \in \overline{\mathrm{Aut}^{(0)} M}.$$

Из ранее доказанного факта $\varphi^{\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda)} \in \bar{G}$ вытекает $\varphi^{\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda^{-1})} \in \bar{G}$ и потому

$$\varphi^{\lambda\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda^{-1})} = \varphi^{\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda^{-1})} \cdot \varphi^{\lambda} \in \bar{G}.$$

Таким образом:

$$\varphi^{\lambda\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda^{-1})} \in \bar{G} \cap \overline{\mathrm{Aut}^{(0)} M}$$

и потому

$$\varphi^{\lambda\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda^{-1})} = \varepsilon,$$

$$\lambda\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda^{-1}) = 1,$$

$$\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda^{-1}) = \lambda^{-1},$$

$$\bar{\psi}_j^{-1}(\lambda) = \lambda,$$

$$\bar{\psi}_j(\lambda) = \lambda.$$

В общем случае, поскольку $\varphi^{\lambda} = \varphi^{\lambda_t} \cdot \varphi^{\lambda^{(s)}}$, имеем:

$$\bar{\psi}_j(\lambda) = \bar{\psi}_j(\lambda_t \cdot \lambda^{(s)}) = \bar{\psi}_j(\lambda_t) \cdot \bar{\psi}_j(\lambda^{(s)}) = \lambda_t \cdot \lambda^{(s)} = \lambda.$$

Иначе говоря, все элементы группы $\overline{\mathrm{Aut}^{(\varphi)}M}$ являются линейными преобразованиями.

С другой стороны из предыдущей леммы следует, что линейная часть H группы $\bar{G}$ не является одноэлементной.

Следствие. Если $\varphi\in\overline{\mathrm{Aut}^{(\varphi)}M}$, то для любого автоморфизма $\bar{\varphi}\in \mathrm{Aut}F$ справедливо равенство $\bar{\varphi}(\lambda)=\lambda$.

Ереванский государственный
университет

Յու. Մ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

Կիսագծային ձևափոխությունների խմբերի վերաբերյալ

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է կիսագծային ձևափոխությունների խմբի ճեղքման հարցը՝ ըստ ուղիղ և կիսաուղիղ արտադրյալի։ Առանձնացվում է նաև մոդուլների մի դաս, որոնց համար գծային և կիսագծային ձևափոխությունների խմբերը համընկնում են։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. М. Мовсисян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. «Математика», т. XI, № 6 (1976). [2] *А. И. Мальцев*, Труды 4-го Всесоюзного мат. съезда, Л., I, 169—198, (1963).