УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

С. Г. Рубанович

О сингулярных интегральных уравнениях с разрывными коэффициентами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 4/VII 1978)

Пусть Z^+ конечная односвязная область в комплексной плоскости, ограниченная гладким контуром l , а Z^- область, дополняющая $Z^+ \cup l$ до полной плоскости. Положительным направлением на l будем считать направление, оставляющее Z^+ слева. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений:

$$Lu(t_0) = A(t_0)u(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_l \frac{u(t)dt}{t-t_0} + \frac{a(t_0)}{2\pi i} \int_l u(t) \ln\left(1 - \frac{t_0}{t}\right) dt + \\ + \frac{b(t_0)}{2\pi i} \int_l u(t) \ln\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) dt + \int_l H(t, t_0)u(t)dt = f(t_0), \quad (1)$$

где $t_0 \in l$, $t \in l$; $u(t) = (u_1(t) \dots u_n(t))$ искомая вектор-функция на l ; $f(t) = (f_1(t) \dots f_n(t))$ заданная вектор-функция на l ; $A(t)$, $B(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $H(t, t_0)$ $n \times n$ — матрицы-функции, причем $\frac{dH(t, t_0)}{dt}$ имеет особенность при $t = t_0$ не выше логарифмического порядка. В (1) под $\ln\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)$ соответственно под $\ln\left(1 - \frac{t_0}{t}\right)$ при заданном $t_0 \in l$ подразумевается ветвь, непрерывная в точках $t \in Z^+ \cup l$ ($t \in Z^- \cup l$) при $t \neq t_0$ и обращающаяся в нуль при $t = 0$ ($t = \infty$). Можно всегда предполагать, что $0 \in Z^+$. Введем обозначения

$$A + B = P(t), \quad A - B = Q(t), \quad a \frac{dt}{ds} = p(t), \quad b \frac{dt}{ds} = q(t),$$

где $\frac{dt}{ds}$ есть производная от точки контура по его длине. Уравнение (1) называется уравнением нормального типа, если $\det P(t) \neq 0$,

$\det Q(t) \neq 0$ всюду на l . Уравнения нормального типа полностью изучены. Мы рассмотрим случай, когда $P(t)$, $Q(t)$, $p(t)$ и $q(t)$ имеют разрывы первого рода в точках $t_1, \dots, t_N$ контура l , а на интервалах $l_1, \dots, l_N$ между точками разрыва бесконечно дифференцируемы. Причем матрицы-функции $P(t)$ и $Q(t)$ на каждом интервале l_m сохраняют постоянные ранги $r_p^{(m)}$ и $r_q^{(m)}$ соответственно, ($r_p^{(m)}$ и $r_q^{(m)}$ могут и не быть равными n), $m=1, \dots, N$. Уравнение (1) назовем нетеровым в классе функций H если однородное уравнение $Lu=0$ имеет конечное число (k_1) линейно независимых решений $u \in H$, а неоднородное с правой частью f , имеющей в точках $t_1, \dots, t_N$ разрывы первого рода и такой, что $\frac{df}{dt} \in H$ на каждом интервале l_m , разрешимо в классе

H тогда и только тогда, когда

$$\int_l (f(t), v_j(t)) dt = 0, \quad j=1, \dots, k_2, \quad (2)$$

$$\sum_{m=1}^N \int_{l_m} \left| (f(t), w_j(t)) + \left(\frac{df}{dt}, \frac{dw_j}{dt} \right) \right| dt, \quad j=1, \dots, k_3, \quad (3)$$

где $v_1, \dots, v_{k_2}$, $w_1, \dots, w_{k_3}$ некоторые n -мерные вектор-функции. Причем эти условия линейно независимы, т. е. никакая нетривиальная линейная комбинация выражений (2), (3) не обращается в нуль при всех указанных вектор-функциях f . Индексом уравнения (1) назовем число: $\text{ind } L = k_1 - k_2 - k_3$. При исследовании нетеровости уравнения (1) важную роль играют скалярные функции $p_0(t)$ и $q_0(t)$, определяемые из равенств (при $|\xi| \rightarrow \infty$):

$$\det(\xi P + p) = p_0(t) \xi^{r_p} + o(\xi^{r_p}); \quad \det(\xi Q + q) = q_0(t) \xi^{r_q} + o(\xi^{r_q}) \quad (4)$$

где числа r_p и r_q на каждом интервале l_m совпадают с $r_p^{(m)}$ и $r_q^{(m)}$ соответственно, $m=1, \dots, N$.

1. Случай гладких коэффициентов. (т. е. $N=0$, а $P(t)$ и $Q(t)$ сохраняют на l постоянные ранги r_p и r_q соответственно). Этот случай рассмотрен в (1). Нами получен эквивалентный результат, только проще поддающийся проверке и вычислению:

Теорема 1. Уравнение (1) с гладкими коэффициентами является нетеровым в классе Гельдера с показателем $\alpha > 0$ тогда и только тогда, когда $p_0(t)$ и $q_0(t)$ не обращаются в нуль на контуре l . Причем

$$\text{ind } L = \frac{1}{2\pi} [\arg q_0(t)]_l - \frac{1}{2\pi} [\arg p_0(t)]_l, \quad (5)$$

а в условиях разрешимости уравнения (1) отсутствуют условия вида (3).

Замечание. В теореме 1 класс Гельдера можно заменить на любой разумный класс, в котором сингулярный интеграл непрерывен.

2. Случай разрывных коэффициентов. (Впервые изучался в (2)).

Ввиду трудностей исследования поведения решений в окрестности точек разрыва, будем искать решения уравнения (1) не в классе Гельдера, а в соболевском пространстве H_0 , $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$, норма

$\|u\|_0$, в котором определяется следующим образом. Пусть $\tau \in l$ фиксированная точка. Обозначим через $s(t)$ длину дуги $(\tau, t) \subset l$, на которой направление от τ к t совпадает с положительным направлением на l . Положим $\bar{u}(\xi) = \int_{\tau}^{\xi} e^{i(t-\tau)s} u(t) ds(t)$. Тогда $\|u\|_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi^\alpha u(\xi)|^2 d\xi$.

Очевидно, $H_0 = L_2(l)$. Как известно, если выполнены условия нормальности, то для исследования решений уравнения (1), изучается жорданова форма матриц $Q^{-1}(t_m+0)P(t_m+0) \times P^{-1}(t_m-0)Q(t_m-0)$, $m = 1, \dots, N$, (2). В нашем случае, вместо этих матриц изучаются матрицы-функции

$$R_m(\xi) = (\xi Q(t_m+0) + q(t_m+0))^{-1} (\xi P(t_m+0) + p(t_m+0)) \times \\ \times (\xi P(t_m-0) + p(t_m-0))^{-1} (\xi Q(t_m-0) + q(t_m-0)), \quad m = 1, \dots, N \quad (6)$$

$$\rho_m(\xi) = (\xi P(t_m-0) + p(t_m-0))^{-1} (\xi Q(t_m-0) + q(t_m-0)) \times \\ \times (\xi Q(t_m+0) + q(t_m+0))^{-1} (\xi P(t_m+0) + p(t_m+0)), \quad m = 1, \dots, N \quad (7)$$

Вместо приведения к жордановой форме, $R_m(\xi)$ и $\rho_m(\xi)$ приводятся к виду:

$$K_m^{-1}(\xi) R_m(\xi) K_m(\xi) = \text{diag} \{ (M_{mj} + O(\xi^{-1}))_{j=0}^{\nu_j-1} + O(\xi^{-3}) \} \quad (8)$$

$$\gamma_m^{-1}(\xi) \rho_m(\xi) \gamma_m(\xi) = \text{diag} \{ (\nu_{mj} + O(\xi^{-1}))_{j=0}^{\nu_j-1} + O(\xi^{-3}) \}, \quad (9)$$

где $K_m(\xi)$ и $\gamma_m(\xi)$ есть $n \times n$ — матрицы-функции, имеющие при $|\xi| \rightarrow \infty$ вид

$$K_m(\xi) = k_m + O(\xi^{-1}), \quad \gamma_m(\xi) = \gamma_m + O(\xi^{-1}) \quad (10)$$

с невырожденными $n \times n$ -матрицами (постоянными) k_m и γ_m . $\text{diag} \{ \dots \}$ означает квадратную блочно-диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят блоки, указанные в фигурных скобках; M_{mj} и ν_{mj} невырожденные матрицы (постоянные) размером $n_{mj} \times n_{mj}$ и $\nu_{mj} \times \nu_{mj}$ соответственно, приведенные к жордановой форме. Случай, когда $n_{mj} = 0$ или $\nu_{mj} = 0$ не исключается, в этом случае будем считать, что соответствующий блок отсутствует. Однако, если постоянную матрицу всегда можно привести к жордановой форме, то матрица-функция к виду (8), (9) приводится не всегда. А именно, имеет место следующее утверждение

Лемма 1. Пусть задана $n \times n$ -матрица-функция $R(\xi) = \sum_{j=0}^r \rho_j \xi^j + O(\xi^{-1})$, где $\rho_1, \dots, \rho_r$ некоторые постоянные матрицы.

Тогда существует $n \times n$ -матрица-функция $K(\xi) = k + O(\xi^{-1})$ с невырожденной матрицей k , такая что

$$R(\xi)K(\xi) = (T + O(\xi^{-1})) \text{diag} \{ I_{n_j} \xi^{r-1} \}_{j=0}^r$$

где T $n \times n$ — матрица с линейно независимыми первыми $n-p$ столбцами; I_{n_j} единичная $n_j \times n_j$ — матрица; $n_0, \dots, n_r$ неотрицательные целые числа, однозначно определяемые по $R(\xi)$. Для того, чтобы также существовала $n \times n$ — матрица $\gamma(\xi) = \gamma + O(\xi^{-1})$ с невырожденной матрицей γ , такая, что

$$\gamma^{-1}(\xi)R(\xi)\gamma(\xi) = \text{diag} \{ (M_j + O(\xi^{-1}))\xi^{n_j} \}_{j=0}^r + O(\xi^{-1})$$

где M_j невырожденная $n_j \times n_j$ — матрица, $j=0, \dots, r$, необходимо и достаточно, чтобы главные миноры матрицы T порядков $\sum_{j=0}^r n_j$, $r=0, 1, \dots, r$ были невырожденны.

Заметим, что после умножения на ξ^2 матрицы (6), (7) приобретают вид, рассмотренный в лемме 1 с $r=4$. Поэтому эта лемма полностью решает вопрос о приведении к виду (8) и (9), а алгоритм приведения строится при доказательстве леммы. Нами также выяснена связь между представлениями (8) и (9):

Лемма 2. *Имеют место равенства $n_{mj} = v_{mj}$, $m=1, \dots, N$, $j=0, \dots, 4$. Собственные числа матриц M_{mj} и γ_m совпадают, причем совпадают и кратности этих собственных чисел.*

Нами рассмотрено уравнение (1), для которого имеют место представления (8) и (9) и при каждом $m=1, \dots, N$ матрицы $\|P(t_m+0)|Q(t_m+0)\|$ и $\|P(t_m-0)|Q(t_m-0)\|$ имеют ранг n . Для экономии места мы сформулируем соответствующие результаты лишь в случае, когда коэффициенты уравнения (1) в окрестности точек разрыва кусочно постоянны. Но в конце вкратце укажем, какие изменения будут в общем случае.

Теорема 2. *Пусть скалярные функции $p_0(t)$ и $q_0(t)$, определяемые из равенств (4), не обращаются в нуль на контуре L , и каждое собственное число λ матрицы M_{mj} , $m=1, \dots, N$, $j=0, \dots, 4$, удовлетворяет неравенству*

$$\arg \lambda \neq 2\pi z + g\pi + \pi \quad (11)$$

где $g=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ при $j=1, 3$, и $g=0, \pm 2, \pm 4, \dots$ при $j=0, 2, 4$.

4. Тогда уравнение (1) нетерово в H_α , $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$.

Замечание. При $j=1, 2, 3$ можно ослабить условия теоремы 2, а именно, потребовать либо выполнения неравенств (11), либо выполнения некоторых простых условий от матриц γ_m и δ_m , определяемых из равенств:

$$(\xi P(t_m-0) + p(t_m-0))^{-1}(\xi Q(t_m-0) + q(t_m-0)) = \gamma_m \xi + \delta_m + O(\xi^{-1}) \quad (12)$$

Тогда условия теоремы 2 становятся также необходимыми, а формула индекса, которую мы получим ниже, не изменится.

Теперь введем числа $x_c^{(m)}$, $m=1, \dots, N$ определяющие вклад разрывов в индекс уравнения (1). Зафиксируем m и произведем следующие построения.

1) Определим формальные элементы $f_\lambda^{(m)}$, где λ комплексное

число j и k неотрицательные целые числа. Обозначим через F линейное пространство конечных формальных сумм всевозможных таких элементов с комплексными коэффициентами. Пусть $\Lambda_{m_1}, \dots, \Lambda_{m_k}$ все жордановы клетки с учетом их кратности матрицы $\text{diag}\{M_{m_j}\}_{j=1}^k$ с собственными числами $\lambda_{m_1}, \dots, \lambda_{m_k}$ соответственно. Обозначим через ρ_{ms} размер клетки Λ_{ms} , $s=1, \dots, \theta$. Каждой клетке Λ_{ms} противопоставим два множества ρ_{ms} -мерных формальных векторов вида

$$U_s = \begin{pmatrix} u_{s,1} \\ u_{s,2} \\ \vdots \\ u_{s,\rho_{sm}} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad V_s = \begin{pmatrix} v_{s,1} \\ v_{s,2} \\ \vdots \\ v_{s,\rho_{sm}} \end{pmatrix}$$

с компонентами из F следующим образом.

Пусть λ_{ms} лежит в M_{m_j} . Тогда если $j=1$ и $\text{Im}e^{-2\pi i \lambda_{ms}} > 0$ или $j=2$ и $e^{-2\pi i \lambda_{ms}}$ не есть положительное число, то полагаем

$$u_{s,k} = \sum_{r=0}^{\rho_{ms}-k-1} x_{k+r}^{(s)} f_{r+1}^{(\lambda_{ms}, j)}, \quad k=1, \dots, \rho_{ms}$$

где $x_r^{(s)}$ числовые коэффициенты. Если же $j=3$ и $\text{Im}e^{-2\pi i \lambda_{ms}} > 0$, то полагаем

$$v_{s,k} = \sum_{r=0}^{\rho_{ms}-k-1} x_{k+r}^{(s)} f_{r+1}^{(\lambda_{ms}, 3)}, \quad k=1, \dots, \rho_{ms}$$

В остальных случаях U_s или V_s полагаются равными нулю.

2) Для формальных n -мерных векторов $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_\theta \end{pmatrix}$ и $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_\theta \end{pmatrix}$ равенство $\gamma_m U + \delta_m V = 0$, где матрицы γ_m и δ_m опреде-

ляются из (12), представляет систему уравнений относительно коэффициентов $x_r^{(s)}$. Число $x_r^{(s)}$ есть размерность пространства нулей этой системы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда

$$\text{ind } L = \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \left([\arg q_0(t)]_{t_m} - [\arg p_0(t)]_{t_m} - \sum_{s=1}^{\theta} \rho_{ms} \arg \lambda_{ms} \right) + \right. \\ \left. + x_r^{(m)} + r_0 - n - \frac{n + n_{m_2}}{2} \right\}, \quad (13)$$

где $\arg \lambda_{ms}$ выбирается в интервале $2\pi z - \pi < \arg i < 2\pi z + \pi$; $r_0^{(m)}$ определяется в начале статьи; n_{m_2} размер матрицы M_{m_2} в (8). Число k , условий вида (3) удовлетворяет оценке:

$$k_2 \leq \sum_{m=1}^N (4n - r_p^{(m)} - r_q^{(m)} - 2n_{m_2}). \quad (14)$$

З а м е ч а н и е 1. Если коэффициенты уравнения (1) не кусочно постоянны в окрестности точек разрыва, то к условиям нетеровости добавится условие на производные слева и справа в точках разрыва, а член, зависящий от этих производных добавится к формуле индекса.

З а м е ч а н и е 2. Если условия нормальности не нарушены, то нетрудно проверить, что правая часть в (14) обращается в нуль, а (13) обращается при $\alpha = 0$ в известную формулу индекса в пространстве L_2 .

З а м е ч а н и е 3. В случае, если в точках $t_1, \dots, t_N$ коэффициенты фактически не терпят разрывов, то $k_2 = \sum_{m=1}^N (2n - r_p^{(m)} - r_q^{(m)})$.

Этому же числу равна правая часть в (14) и на столько же отличаются формулы (5) и (13). В этом случае условия (3) являются условиями на скачки вектор-функции f в точках $t_1, \dots, t_N$.

Ереванский политехнический институт

II. Գ. ՌՈՒՐԱՆՈՎԻՉ

Խզվող գործակիցներով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների մասին

Հոդվածում զիտարկվում է կոմպլեքս հարթության ողորկ l կոնտուրի վրա (1) հավասարումը: Դործակիցներ A, B, a, b հանդիսանում են $n \times n$ — մատրից-ֆունկցիաները, $u = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ որոնելի վեկտոր-ֆունկցիան է, իսկ $f = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ հայտնի վեկտոր-ֆունկցիան է: Այս հավասարման համար մտցվում է նյութերության հասկացողությունը այն դեպքում, երբ նորմալության պայմանները $\det(A(t) + B(t)) \neq 0$, $\det A(t) - B(t) \neq 0$, խախտվում են, իսկ դործակիցները ունեն $t_1, \dots, t_N$ խզման կետեր: Աշխատանքում ստացված են (1) հավասարման նյութերության պայմանները հաշված է նրա ինդեքսը (բանաձև (13)):

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ե Լ Ե Ր Ք Յ Ո Ւ Ն

¹ Н. Е. Томасян, Дифференциальные уравнения, т. 3, вып. 1 (1967) ² С. Г. Рыбакович, «Известия АН Арм. ССР», т. 7, №№ 2, 3 (1972) ³ Н. П. Веква, Системы сингулярных интегральных уравнений, изд. «Наука», М., 1970.