ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 5

УДК 517.512.7

МАТЕМАТИКА

М. Ж. Григорян

Представление функции классов $L_p[0,1], 1 \leqslant p < 2$ ортогональными рядами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 26/VI 1976)

1. В работе ([1]) доказана следующая

Теорема А. (А. А. Талалян). *Если* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — *полная в* $L_2[0,1]$ *ортонормированная система, то для любой* $f(x)\in L_p[0,1]$, $0<p<1$ *и любого натурального* N, *существует ряд*

$$\sum_{n>N} c_n\varphi_n(x), \tag{1}$$

который сходится к $f(x)$ *в метрике* $L_p[0,1]$, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \| f(x)-\sum_{k=N}^{n} c_k\varphi_k(x) \|_{L_p}=0. \tag{2}$$

Очевидно, эта теорема при $p\geqslant 2$ не верна ни для одной ортонормированной системы, а при $1\leqslant p<2$ не верна для систем, состоящих из ограниченных функций. Тем не менее оказывается, что во втором случае, когда $1\leqslant p<2$, существуют ортонормированные системы $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которых имеет место аналог теоремы А одновременно для всех указанных p. Это утверждение получается как следствие сформулированной ниже более общей теоремы 1.

Сначала введем некоторые определения и обозначения, через

$$\{Q_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \tag{3}$$

мы будем обозначать все алгебраические полиномы с рациональными коэффициентами.

Пересечение классов $L_p[0,1]$, $1\leqslant p<2$ будем обозначать через H, т. е.

$$H=\bigcap_{1\leqslant p<2} L_p[0,1]. \tag{4}$$

Определение 1. Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность почти везде конечных измеримых функций, определенных на отрезке $[0,1]$. Ряд

$$\sum f_n(x) \tag{5}$$

называется универсальным, относительно частичных рядов в классе $L_p[0,1]$ $0<p<\infty$, соответственно в классе H, если для любой функции $f(x)\in L_p[0,1]$ (соответственно $f(x)\in H$), из ряда (5) можно выделить частичный ряд

$$\sum f_{n_k}(x) \qquad (n_1<n_2<\cdots<\cdots), \tag{6}$$

который сходится к $f(x)$ в метрике L_p $1\leqslant p<2$ (соответственно в метрике всех пространств $L_p(1\leqslant p<2)$.

Определение 2. Ряд (5) называется универсальным в классе L_p $1\leqslant p<2$ (соответственно в H), если для любой функции $f(x)\in L_p$ (соответственно $f(x)\in H$), существует последовательность возрастающих натуральных чисел $\{n_k\}$, такая, что подпоследовательность частичных сумм $S_{n_k}=\sum\limits_{j=1}^{n_k} f_j(x)$ сходится k $f(x)$ в метрике L_p, $1\leqslant p<2$ (соответственно в метрике всех пространств $L_p(1\leqslant p<2)$.

Определение 3. Система функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, определенных на $[0,1]$, называется системой представления в L_p; $1\leqslant p<2$ соответственно в классе H, если для любой функции $f(x)\in L_p$ (соот. $f(x)\in H$) существует ряд

$$\sum a_k f_k(x), \tag{7}$$

который сходится к $f(x)$ в метрике L_p, $1\leqslant p<2$ (соответственно в метрике всех пространств L_p, $(1\leqslant p<2)$.

Имеет место

Теорема 1. *Существуют ортонормированная на $[0,1]$ система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x) \tag{8}$$

обладает следующим свойством:

для любого натурального N ряд

$$\sum_{k>N} a_k f_k(x) \tag{9}$$

является универсальным относительно частичных рядов как в любом фиксированном L_p $1\leqslant p<2$, так и в H.

Из теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Существует ортогональный ряд*

$$\sum a_k \varphi_k(x), \tag{10}$$

у которого не все коэффициенты a_k, $k=1,2\ldots$ равны нулю и который сходится к нулю одновременно во всех метриках L_p, $1\leqslant p<2$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\right\|_{L_p}=0 \tag{11}$$

для всех p, $1\leqslant p<2$.

II. При доказательстве теоремы I применяются две леммы.

Лемма 1. *Существует полная ортонормированная в $L_2[0, 1]$ система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, обладающая следующим свойством:*

(*B*). *Для любого натурального N и действительных чисел a_1; a_2;...a_N, где $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \neq 0$, функция $\sum_{n=1}^{N} a_n f_n(x) \overline{\in} L_q$ для всех $q>2$.*

Доказательство. Обозначим

$$\Delta_k = \left[\frac{1}{k+1}; \ \frac{1}{k}\right] \quad k=1, 2 \cdot \cdot \cdot \tag{12}$$

Легко видеть, что на каждом интервале Δ_k можно определить функцию $\eta_k(x)$; $\eta_k(x)=0$ при $x\overline{\in}\Delta_k$. Такую, что

$$\text{а)} \ \|\eta_k\|_{L_1}<\frac{1}{k},$$

$$\text{б)} \ \eta_k(x)\overline{\in}L_q(\Delta_k) \ \text{ для всех } \ q>2. \tag{13}$$

Положим

$$\varphi_k(x)=Q^k(x)+\eta_k(x). \tag{14}$$

Очевидно, система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независимо замкнута в $L_2[0,1]$ и обладает свойством (*B*). Поэтому система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полученная ортогонализацией методом Шмидта системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет требованиям леммы 1.

Лемма 2. *Для того, чтобы полная ортонормированная в $L_2[0,1]$, система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ оставалась замкнутой в L_p, $1\leq p<2$, после удаления из нее любого конечного числа функций, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (B) при $q=p'$ (где $1/p+1/p'=1$, при $p>1$ и L_∞ пространство ограниченных функций).*

Доказательство. Необходимость.

Если система $\{f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ замкнута в L_p, $1\leq p<2$, то она полна относительно $L_{p'}$, где $1/p+1/p'=1$. Тогда из предположения

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x) \in L_{p'} \tag{15}$$

и из того, что

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x)\right) f_n(x)dx=0; \ n>N \tag{16}$$

следует

$$\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(x)=0 \tag{17}$$

и, следовательно

$$a_k=0;\ k=1,\ 2\ \ldots\ N. \tag{18}$$

Достаточность. Пусть система $\{f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ не замкнута в L_p, тогда существует функция $g(x)\neq 0$, $g(x)\in L_{p'}$ для которой

$$\int_0^1 g(x)f_k(x)dx=0;\ k>N \tag{19}$$

Так как система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ полна в L_2, то из (19) следует, что

$$g(x)=\sum_{k=1}^{N} c_k f_k(x) \tag{20}$$

где

$$\sum_{k=1}^{N}|c_k|\neq 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму 2.

III. Доказательство теоремы 1.

Пусть $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная в L_2 ортонормированная система обладает свойством (B) для всех $q>2$, такая система существует согласно леммы 1. Возьмем последовательность $\{p_k\}$, где

$$1\leqslant p_1<p_2<\cdots<p_k\ldots\lim_{k\to\infty}p_k=2 \tag{21}$$

Определим линейные комбинации

$$h_k(x)=\sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} c_l f_l(x) \tag{22}$$

следующим образом:
положим $m_0=N+1;\ m_1=N+2$

$$h_1(x)=\sum_{l=m_0+1}^{m_1} c_l f_l(x)=0. \tag{23}$$

Далее, предположим, что полином $h_k(x)=\sum_{l=m_{k-1}+1}^{m_k} c_l f_l(x)$ уже определен.

Согласно лемме 2 найдем полином

$$h_{k+1}(x)=\sum_{l=m_k+1}^{m_{k+1}} c_l f_l(x), \tag{24}$$

который удовлетворяет условию

$$\| Q_{k+1}(x)-h_{k+1}(x)\|_{L_{p_{k+1}}}<\frac{1}{k+1}. \tag{25}$$

Таким образом, определенные нами полиномы $h_k(x)$; $k=1,\ 2\ \ldots$ удовлетворяют условию (25) для любого $k\geqslant 1$. Покажем, что ряд

$$\sum h_k(x)=\sum a_k f_k(x), \tag{26}$$

где

$$f_k(x)=\frac{h_k(x)}{\| h_k \|_{L_1}} \quad \text{и} \quad a_k=\| h_k \|_{L_1} \tag{27}$$

удовлетворяет требованиям теоремы 1.

Пусть $f(x)\in H$.

Возьмем полином $Q_{n_1}(x)$ такой, что

$$\| f(x)-Q_{n_1}(x) \|_{L_{p_1}}<1; \quad n_1>N. \tag{28}$$

Тогда из (25) и (28) следует, что

$$\| f(x)-h_{n_1}(x) \|_{L_{p_1}}<2. \tag{29}$$

Предположим теперь, что уже определены натуральные числа $N<n_1<n_2<\cdots<n_k$, для которых

$$\left\| f(x)-\sum_{s=1}^{l} h_{n_s}(x)\right\|_{L_{p_l}}<\frac{2}{l}; \quad l=1,\cdots k. \tag{30}$$

Возьмем полином $Q_{n_{k+1}}$ такой, что

$$\left\| f(x)-\sum_{s=1}^{k} h_{n_s}(x)-Q_{n_{k+1}}\right\|_{L_{p_{k+1}}}<\frac{1}{k+1}. \tag{31}$$

Из (25) и (31) следует, что

$$\left\| f(x)-\sum_{s=1}^{k+1} h_{n_s}(x)\right\|_{L_{p_{k+1}}}<\frac{2}{k+1}. \tag{32}$$

Легко видеть, что ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} h_{n_s}(x) \tag{33}$$

сходится к $f(x)$ одновременно во всех метриках L_p; $1\leqslant p<2$. В самом деле, пусть $\varepsilon>0$; $1\leqslant p<2$. Возьмем k_0 настолько большим, чтобы

$$1/k<\varepsilon/2; \ p<p_k \quad \text{при} \quad k>k_0. \tag{34}$$

Из (32) и (34) получаем:

$$\left\| f(x)-\sum_{s=1}^{k} h_{n_s}(x)\right\|_{L_p}\leqslant\left\| f(x)-\sum_{s=1}^{k} h_{n_s}(x)\right\|_{L_{p_k}}<\varepsilon. \tag{35}$$

Аналогично можно доказать, что ряд (26) является универсальным относительно частичных рядов в классе L_p; $1\leqslant p<2$.

Замечание 1. Легко видеть, что любой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu(k)} f_{\nu(k)}(x)$ (где $\nu(k)$ — перестановка натуральных чисел) также удовлетворяет требованиям теоремы 1.

Замечание 2. Нетрудно видеть, что построенная нами ортонормированная система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ содержит бесконечное множество базисов пространства L_p для любого p; $1\leq p<2$.

Замечание 3. Легко видеть, что как система $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, так и ее любая подсистема вида $\{f_k(x)\}_{k=N}^{\infty}$ является системой представления как в классе $L_p: 1\leq p<2$, так и в классе H.

Применяя метод доказательства теоремы 1 легко установить также следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть* $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *— полная в* L_2 *ортонормированная система, обладающая свойством* (*B*) *для всех* $p'>2$. *Тогда существует ряд*

$$\sum_{k>N} a_k f_k(x), \tag{36}$$

(*где* N *— любое натуральное число*), *который универсален как в любом фиксированном* L_p, $1\leq p<2$ *так и в* H.

В заключение выражаю благодарность чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Таляляну за постановку задач и внимание к работе.

Ереванский государственный университет

Մ. Ժ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

L_p, $1\leq p<2$ դասերի ֆունկցիաների ներկայացումը օրթոգոնալ շարքերով

Կառուցված է օրթոգոնալ շարք, որը յուրաքանչյուր տեղափոխությունից և կամայական վերջավոր թվով անդամներ դուրս գցելուց հետո մնում է ունիվերսալ, ենթաշարքերի նկատմամբ, բոլոր L_p, $1\leq p<2$ *դասերում միաժամանակ։*

Այստեղից հետևում է օրթոնորմալ սիստեմի գոյությունը, որը յուրաքանչյուր տեղափոխությունից և կամայական վերջավոր թվով անդամներ դուրս գցելուց հետո մնում է ներկայացման սիստեմ բոլոր L_p, $1\leq p<2$ *դասերում միաժամանակ։ Բերվում է նաև օրթոնորմալ սիստեմի օրինակ, որը կամայական տեղափոխության դեպքում պարունակում է անվերջ թվով,* L_p, $1\leq p<2$ *դասի, բազիսներ։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Талалян.* Представление функций классов L_p, $0<p<1$ ортогональными рядами Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae Tomus 21(1—2), pp. 1—9 (1970). [2] *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, М., 1958.