ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 5

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

О равномерном приближении голоморфных функций в некоторых областях пространства C^n

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 20/VI 1978)

Пусть D—ограниченная область голоморфности в пространстве C^n, задаваемая следующим образом:

$$D=\{z:\rho(z)<0,\ |\chi(z)|<1\}. \qquad (1)$$

Здесь $\chi(z)$—функция, голоморфная в некоторой окрестности Ω замыкания области D; $\rho(z)$—вещественнозначная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, строго плюрисубгармоническая в Ω, т. е. квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\,\partial\bar z_k}w_j\bar w_k$$

положительно определена при всех $z\in\Omega$. Область D предполагается невырожденной. Это означает, что

$$\operatorname{grad}\rho(z)\neq 0 \quad \text{на грани} \quad \sigma_1=\{z\in\bar D:\rho(z)=0\},$$

$$\operatorname{grad}\chi(z)\neq 0 \quad \text{на грани} \quad \sigma_2=\{z\in\bar D:|\chi(z)|=1\},$$

$$\operatorname{rang}\left\|\begin{matrix}\operatorname{grad}\rho(z), & \overline{\operatorname{grad}\rho(z)}\\ \operatorname{grad}\chi(z), & \overline{\operatorname{grad}\chi(z)}\end{matrix}\right\|=2 \quad \text{на остове} \quad \sigma_1\cap\sigma_2.$$

Область D является, так сказать, областью „типа полушара".

Через $C_A(\bar D)$ обозначается банахово пространство функций f, голоморфных в D и непрерывных на $\bar D$, с равномерной нормой

$$\|f\|=\|f\|_D=\sup_{z\in\bar D}|f(z)|.$$

Настоящая работа посвящена доказательству следующего результата

Теорема. *Для всякой функции $f\in C_A(\bar D)$ и числа $\varepsilon>0$ существует функция F, голоморфная в некоторой окрестности $\bar D$, такая, что*

$$\|f-F\|<\varepsilon.$$

Доказательство основано на известной схеме сведения задачи равномерного приближения к решению $\bar\partial$-уравнения с равномерной оценкой (см., например, [1]). Формулы для решения $\bar\partial$-уравнения с оценкой в случае областей рассматриваемого типа даны в работе [2].

Следующая лемма утверждает возможность локального приближения функций из $C_A(D)$.

Лемма. *Существует конечная система шаров B_k $(k=1, 2, \ldots, p)$, покрывающая границу ∂D области D $(\partial D \subset \bigcup_{k=1}^{p} B_k)$, таких, что сужение всякой функции $f \in C_A(D)$ на множество $\bar B_k \cap \bar D$ равномерно приближается функциями, голоморфными в окрестности $\bar B_k \cap \bar D$.*

Доказательство. Пусть $f \in C_A(D)$. В силу вещественной невырожденности области D для каждой точки $\zeta \in \partial D$ существуют шар B_ζ с центром в ζ и единичный вектор ν_ζ такие, что при всех достаточно малых $\delta > 0$ функция $f(z+\delta\nu_\zeta)$ голоморфна в окрестности множества $\bar B_\zeta \cap \bar D$. Поскольку f равномерно непрерывна на $\bar D$, для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$|(f(z+\delta\nu_\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

при всех $\delta < \delta_0$ и $z \in \bar B_\zeta \cap \bar D$. Затем из покрытия $\{B_\zeta\}$ компакта ∂D выбираем конечное семейство $B_1, B_2, \ldots, B_p$.

Доказательство теоремы. Построим систему бесконечно дифференцируемых, неотрицательных, финитных функций $g_k(z)$, $(k=0, 1, \ldots, p)$, удовлетворяющих условиям

а). $\operatorname{Supp} g_0 \subset D$, $\operatorname{Supp} g_k \subset B_k$, $(k=1, \ldots, p)$;

б). $\sum_{k=0}^{p} g_k(z) = 1$ в некоторой окрестности множества $\bar D$.

Для $\varepsilon > 0$ построим области

$$D^\varepsilon = \{z : \rho(z) < \varepsilon, \ |\chi(z)| < 1+\varepsilon\}.$$

Согласно лемме, существуют окрестности V_k^ε множеств $\bar B_k \cap \bar D$ и функции f_k^ε, голоморфные в V_k^ε такие, что

$$\|f_k^\varepsilon - f\|_{\bar B_k \cap \bar D} < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{2}$$

Обозначим, далее, $V_0^\varepsilon = D$, $f_0^\varepsilon = f$. Неравенство (2) справедливо тогда и при $k=0$. Число $\varepsilon > 0$ будем предполагать настолько малым, чтобы $\bar D^\varepsilon \subset \bigcup_{k=0}^{p} V_k^\varepsilon$ и чтобы условие б). выполнялось на $\bar D^\varepsilon$.

Рассмотрим следующие функции

$$h_{ik}^\varepsilon(z) = \begin{cases} |f_i^\varepsilon(z) - f_k^\varepsilon(z)|\, g_k(z), & z \in V_i^\varepsilon \cap V_k^\varepsilon, \\ 0, & z \in V_i^\varepsilon \setminus V_k^\varepsilon; \end{cases}$$

$$h_i^\varepsilon(z)=\sum_{k=0}^{p} h_{ik}^\varepsilon(z). \tag{3}$$

Из того, что носитель функции $g_k(z)$ принадлежит множеству $B_k\cap\bar{D}^\varepsilon$ (условие a), причем $B_k\cap\bar{D}^\varepsilon\subset V_k^\varepsilon\cap\bar{D}^\varepsilon$, следует, что функции h_{ik}^ε и h_i^ε бесконечно дифференцируемы на $V_i^\varepsilon\cap\bar{D}^\varepsilon$ и, с учетом (2), для всех $z\in V_i^\varepsilon\cap\bar{D}^\varepsilon$ удовлетворяют следующим оценкам

$$|h_{ik}^\varepsilon(z)|\leqslant|f_i^\varepsilon(z)-f_k^\varepsilon(z)|\leqslant|f_i^\varepsilon(z)-f(z)|+|f(z)-f_k^\varepsilon(z)|<2\varepsilon, \tag{4}$$

$$|h_i^\varepsilon(z)|\leqslant\sum_{k=0}^{p}|h_{ik}^\varepsilon(z)|<2p\varepsilon. \tag{5}$$

Далее, при $z\in V_i^\varepsilon\cap V_j^\varepsilon\cap\bar{D}^\varepsilon$

$$h_i^\varepsilon(z)-h_j^\varepsilon(z)=\sum_{k=0}^{p}[f_i^\varepsilon(z)-f_k^\varepsilon(z)]g_k(z)-\sum_{k=0}^{p}[f_j^\varepsilon(z)-f_k^\varepsilon(z)]g_k(z)=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}[f_i^\varepsilon(z)-f_j^\varepsilon(z)]g_k(z)=f_i^\varepsilon(z)-f_j^\varepsilon(z),$$

т. е.

$$h_i^\varepsilon(z)-f_i^\varepsilon(z)=h_j^\varepsilon(z)-f_j^\varepsilon(z),\quad (i=0,1,\dots,p).$$

Это означает, что на $\bar{D}^\varepsilon$ глобально определена функция

$$h^\varepsilon(z)=h_i^\varepsilon(z)-f_i^\varepsilon(z),\quad z\in V_i^\varepsilon\cap\bar{D}^\varepsilon, \tag{6}$$

причем $h^\varepsilon\in C^\infty(\bar{D}^\varepsilon)$. Используя неравенства (2) и (5), для $z\in B_i\cap\bar{D}$ имеем

$$|h^\varepsilon(z)-f(z)|\leqslant|h_i^\varepsilon(z)|+|f_i^\varepsilon(z)-f(z)|<(2p+1)\varepsilon.$$

Следовательно

$$\|h^\varepsilon-f\|_D<(2p+1)\varepsilon. \tag{7}$$

Далее, используя (6) и (3), с учетом, что функция f_i^ε голоморфна в V_i^ε, имеем при $z\in V_i^\varepsilon\cap\bar{D}^\varepsilon$

$$|\bar{\partial}h^\varepsilon(z)|=|\bar{\partial}h_i^\varepsilon(z)|=\Big|\sum_{k=0}^{p}\bar{\partial}h_{ik}^\varepsilon(z)\Big|\leqslant\sum_{k=0}^{p}|f_i^\varepsilon(z)-f_k^\varepsilon(z)||\bar{\partial}g_k(z)|. \tag{8}$$

Здесь

$$\bar{\partial}h^\varepsilon(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h^\varepsilon(z)}{\partial\bar{z}_k}\,d\bar{z}_k,$$

$$|\bar{\partial}h^\varepsilon(z)|=\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial h^\varepsilon(z)}{\partial\bar{z}_k}\right|.$$

Обозначив $\gamma_0=\gamma_0(D)=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant p}\|\bar{\partial}g_k\|$, из (8) и (4) имеем

$$\|\bar{\partial}h^\varepsilon\|_{D^\varepsilon}\leqslant 2\gamma_0\varepsilon. \tag{9}$$

Равенство (7) означает, что бесконечно дифференцируемая на $\overline{D'}$ функция h' приближает f с точностью $(2p+1)\varepsilon$. Теорема будет доказана, если нам удастся подобрать малую по модулю функцию u так, чтобы разность $h'-u$ была бы голоморфной в D', т. е. чтобы $\bar\partial(h'-u)=0$. Неравенство (9) означает, что $\bar\partial h'$ мало. Таким образом, задача сводится к решению с оценкой $\bar\partial$-уравнения

$$\bar\partial u=\bar\partial h' \tag{10}$$

в области D'. Правая часть в (10) — это гладкая $\bar\partial$ — замкнутая форма типа (0, 1); u — искомая функция. В работе [2] дана формула решения уравнения (10), удовлетворяющая равномерной оценке

$$\|u\|_{D'}\leq\gamma(D')\|\bar\partial h'\|_{D'}. \tag{11}$$

Анализ доказательства оценки (11) показывает, что константы $\gamma(D')$ ограничены, т.е.

$$\gamma(D')\leq\gamma=\gamma(D). \tag{12}$$

Из (11), (9) и (12) получаем

$$\|u\|_{D'}\leq 2\gamma_0\gamma\,\varepsilon. \tag{13}$$

Из (10) следует, что функция

$$F(z)=h'(z)-u(z)$$

голоморфна в области D'. Наконец, из (7) и (13) получается оценка

$$\|f-F\|_D\leq\|h'-f\|_D+\|u\|_D<(2p+1)\varepsilon+2\gamma_0\gamma\varepsilon=\gamma_1\varepsilon,$$

где постоянная γ_1 зависит только от области D.
Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

C^n տարածության մեջ որոշ տիրույթներում հոլոմորֆ ֆունկցիաների մոտարկման մասին

Դիցուք D-ն n-չափանի կոմպլեքս տարածության մեջ հոլոմորֆության տիրույթ է, որը որոշվում է հետևյալ պայմանով՝

$$D=\{z:\rho(z)<0,\ |\chi(z)|<1\},$$

որտեղ $\chi(z)$-ը հոլոմորֆ ֆունկցիա է D տիրույթի փակման որևէ շրջակայքում, իսկ $\rho(z)$-ը խիստ պլյուրիսուբհարմոնիկ է և $C_A(D)$-ով նշանակենք

D-ում հոլոմորֆ և $\bar{D}$-ի վրա անընդհատ ֆունկցիաների տարածությունը։ Հոդվածում ապացուցվում է, որ կամայական f ֆունկցիա, որը պատկանում է $C_1(D)$-ին, $\bar{D}$-ի վրա հավասարաչափ մոտարկվում է ֆունկցիաներով, որոնք հոլոմորֆ են $\bar{D}$-ի շրջակայքում։ Դրա համար նախ լեմայում ապացուցվում է f-ի լոկալ մոտարկման հնարավորությունը, իսկ հետո օգտագործվում է այն փաստը, որ D-ում $\bar{\partial}$—հավասարումը ունի լուծում, որը բավարարում է հավասարաչափ գնահատականին։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. Lieb*, Math. Ann., v. 184, №1, (1969). [2] *А. И. Петросян*, ДАН Арм. ССР, т. 67, № 1 (1978).