УДК 519.48

МАТЕМАТИКА

А. Г. Григорян

Кольца эндоморфизмов модулей над малыми предаdditивными категориями

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрияном 5/Х 1978)

В настоящей работе мы формулируем ряд теорем о характеристике некоторых классов малых предаdditивных категорий $\mathcal{C}$ с помощью свойств колец эндоморфизмов тех или иных $\mathcal{C}$ -модулей. Эти теоремы обобщают известные результаты, относящиеся к модулям над кольцом; вместе с тем некоторые из этих теорем отличаются от соответствующих теорем для модулей над кольцом (см. замечания 1°—4°).

1. Категория $\mathcal{K}$ называется *преаdditивной*, если для любых ее объектов p и q множество $\text{Hom}_{\mathcal{K}}(p, q)$ — абелева группа, а композиция морфизмов билинейна. В дальнейшем через $\mathcal{C}$ будем обозначать произвольную малую предаdditивную категорию. Контравариантные аддитивные функторы из $\mathcal{C}$ в категорию абелевых групп называются *$\mathcal{C}$ -модулями*. Категория $\text{Mod } \mathcal{C}$ всех $\mathcal{C}$ -модулей является естественным обобщением категории правых модулей над некоторым кольцом (подробнее о $\mathcal{C}$ -модулях см. (1)). Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули над ними — унитарными и правыми. Запись гомоморфизмов модулей производится слева от аргумента. Обозначения: $\text{Ob } \mathcal{C}$ (иногда просто $\mathcal{C}$) — множество объектов категории $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}^*$ — категория, двойственная к $\mathcal{C}$; $|S|$ — мощность множества S ; $h_X = \text{Hom}_{\mathcal{K}}(-, X)$, где X — объект некоторой категории $\mathcal{K}$; $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R , $M^{(\omega)}$ — прямая сумма ω экземпляров $\mathcal{C}$ -модуля M (ω — некоторая мощность). *Правым идеалом* категории $\mathcal{C}$ называется $\mathcal{C}$ -подмодуль $\mathcal{C}$ -модуля $h_p = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, p)$, $p \in \mathcal{C}$. Прямые суммы $\mathcal{C}$ -модулей h_p , где $p \in \mathcal{C}$, называются *свободными $\mathcal{C}$ -модулями*. Заметим, что не всякий свободный $\mathcal{C}$ -модуль — образующий (категории $\text{Mod } \mathcal{C}$). Назовем *p -рангом (рангом) свободного $\mathcal{C}$ -модуля* $\bigoplus_{p \in \mathcal{C}} (h_p)^{(\omega_p)}$ мощность ω_p множества слагаемых h_p для данного $p \in \mathcal{C}$ (сумму его p -рангов по всем $p \in \mathcal{C}$). Свободный $\mathcal{C}$ -модуль, имеющий ненулевой p -ранг для каждого $p \in \mathcal{C}$, будем называть *строго свободным*. Ясно, что всякий строго свободный $\mathcal{C}$ -модуль — образу-

ющий. Скажем, что строго свободный $\mathcal{C}$ -модуль *равномерно* ω -порожден (ω — некоторая мощность), если все его p -ранги равны ω . Класс $\mathcal{C}$ -модулей $\mathcal{S}$ называется *абстрактным*, если $M \in \mathcal{S}$ и $M \simeq N$ влекут $N \in \mathcal{S}$. Пусть G — проективный образующий категории $\text{Mod } \mathcal{C}$ и $E = \text{Hom}_{\text{Mod } \mathcal{C}}(G, G)$. Тогда $h^0 = \text{Hom}_{\text{Mod } \mathcal{C}}(G, -)$ — функтор из $\text{Mod } \mathcal{C}$ в $\text{Mod } E$, а G — левый E -модуль. Назовем E -модуль M *полным*, если $M \simeq h^0(M \otimes_E G)$. Скажем, что $\mathcal{C}$ -модуль M G -порожден, если существует точная последовательность $\mathcal{C}$ -модулей $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$; если при этом K также G -порожден, то M называется G -связанным. Модуль над кольцом R называется I -связанным, если он R -связан. Будем называть (*абстрактным*) *свойством модулей* произвольную функцию a , сопоставляющую каждой малой предаддитивной категории $\mathcal{C}$ некоторый (*абстрактный*) класс $\mathcal{C}$ -модулей $a_{\mathcal{C}}$. Если a — свойство модулей и $\mathcal{C}$ -модуль M принадлежит $a_{\mathcal{C}}$, то будем говорить, что M *обладает свойством* a . Скажем, что свойство модулей a — (*частичное*) h^0 -свойство, если для всякого (для всякого G -порожденного) $\mathcal{C}$ -модуля M $M \in a_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow h^0(M) \in a_E$. Свойство модулей a назовем (*частичным*) h -свойством, если a — (*частичное*) h^0 -свойство для всякого проективного образующего $\mathcal{C}$ -модуля G .

По аналогии с доказательством теоремы 2.1 из (2) доказываемся

Теорема 1. Если a — абстрактное частичное h -свойство модулей, то для всякой малой предаддитивной категории $\mathcal{C}$ равносильны утверждения: 1) все $\mathcal{C}$ -модули обладают свойством a ; 2) все полные циклические модули над кольцом эндоморфизмов любого проективного образующего $\mathcal{C}$ -модуля обладают свойством a ; 3) все конечно связанные циклические модули над кольцом эндоморфизмов любого проективного образующего $\mathcal{C}$ -модуля обладают свойством a ; 4) все I -связанные модули над кольцом эндоморфизмов любого проективного образующего $\mathcal{C}$ -модуля обладают свойством a ; 5) существует такая мощность ω , что все I -связанные модули над кольцом эндоморфизмов любого строго свободного $\mathcal{C}$ -модуля, p -ранг которого для каждого $p \in \mathcal{C}$ превышает ω , обладают свойством a .

Более того, если a — абстрактное h -свойство, то этим утверждениям равносильно: б) все полные модули над кольцом эндоморфизмов любого проективного образующего (некоторого строго свободного) $\mathcal{C}$ -модуля обладают свойством a .

Аналогично доказательству предложений 2.4, 2.10 и 2.9 из (2) доказываемся.

Предложение 1. Инъективность модуля — абстрактное h -свойство; проективность модуля — абстрактное частичное h -свойство; вложимость модуля в проективный — абстрактное частичное h^1 -свойство для любой мощности $\omega \geq |\text{Ob } \mathcal{C}|$ и равномерно ω -порожденного строго свободного $\mathcal{C}$ -модуля F .

Из теоремы 1 и предложения 1 следуют формулируемые ниже теоремы 2—5.

2. Категория $\mathcal{C}$ называется *классически полупростой* (^{1,3}), если $\mathcal{C}$ -модуль h_p есть прямая сумма минимальных правых идеалов для каждого $p \in \mathcal{C}$.

Теорема 2. Для всякой малой предаддитивной категории $\mathcal{C}$ равносильны утверждения: 1) $\mathcal{C}$ классически полупроста; 2) кольцо эндоморфизмов любого $\mathcal{C}$ -модуля регулярно (в смысле фон Неймана); 3) кольцо эндоморфизмов любого проективного (свободного) $\mathcal{C}$ -модуля регулярно; 4) кольцо эндоморфизмов равномерно счетно порождённого строго свободного $\mathcal{C}$ -модуля регулярно.

3. Известно, что квазифробениусовость кольца R эквивалентна каждому из следующих двух условий, накладываемых на правые R -модули: «все проективные модули инъективны» и «все инъективные модули проективны». Рассматривая эти два условия для $\mathcal{C}$ -модулей, Харада (⁴) выяснил, что в общем случае ни одно из них не следует из другого. С другой стороны, как показал Лещинский (⁵), эти условия остаются равносильными, если их наложить на $\mathcal{C}$ -модули и $\mathcal{C}^*$ -модули одновременно.

Теорема 3. Для всякой малой предаддитивной категории $\mathcal{C}$ равносильны утверждения: 1) все проективные (плоские) $\mathcal{C}$ -модули инъективны; 2) кольцо эндоморфизмов любого проективного образующего $\mathcal{C}$ -модуля самоинъективно справа; 3) кольцо эндоморфизмов любого строго свободного $\mathcal{C}$ -модуля самоинъективно справа; 4) кольцо эндоморфизмов равномерно счетно порождённого строго свободного $\mathcal{C}$ -модуля самоинъективно справа.

Теорема 4. Для всякой малой предаддитивной категории $\mathcal{C}$ равносильны утверждения: 1) все инъективные $\mathcal{C}$ -модули проективны; 2) для любой мощности $\omega \geq |\text{Ob } \mathcal{C}|$ в кольце эндоморфизмов равномерно ω -порождённого строго свободного $\mathcal{C}$ -модуля всякий конечно порождённый (главный) правый идеал — правый аннулятор конечно порождённого левого идеала.

4. Категория $\mathcal{C}$ называется *наследственной справа*, если все ее правые идеалы проективны. Кольцо называется *риккартовым справа*, если в нем правый аннулятор любого элемента — главный правый идеал, порожденный идемпотентом.

Теорема 5. Для всякой малой предаддитивной категории $\mathcal{C}$ равносильны утверждения: 1) $\mathcal{C}$ наследственна справа; 2) кольцо эндоморфизмов любого проективного (свободного) $\mathcal{C}$ -модуля полунаследственно справа; 3) кольцо эндоморфизмов любого проективного (свободного) $\mathcal{C}$ -модуля риккартово справа.

5. Категория $\mathcal{C}$ называется *совершенной справа* (⁶), если все $\mathcal{C}$ -модули имеют проективные накрытия. Кольцо R называется *полурегулярным* (⁶), если идемпотенты можно поднимать по модулю $J(R)$, а факторное кольцо $R/J(R)$ регулярно.

Теорема 6. Для всякой малой предаддитивной категории $\mathcal{C}$ равносильны утверждения: 1) $\mathcal{C}$ совершенна справа; 2) кольцо эндомор-

физмов любого проективного (свободного) $\mathcal{C}$ -модуля полурегулярно;
3) кольцо эндоморфизмов равномерно счетно порожденного строго свободного $\mathcal{C}$ -модуля полурегулярно.

Схема доказательства. 1) $\rightarrow$ 2). Аналогично доказательству теоремы 3.9 из (6). 2) $\rightarrow$ 3). Очевидно. 3) $\rightarrow$ 1). С помощью предложения 1.2 и теоремы 5.4 из (3) и теоремы 3.9 из (6).

6. Категория $\mathcal{C}$ называется когерентной справа (7), если все ее конечно порожденные правые идеалы конечно связаны. По аналогии с доказательством следствия 1 из (8) доказываемся

Теорема 7. Если малая предаддитивная категория $\mathcal{C}$ когерентна справа, то для всякой бесконечной мощности $\omega \geq |\text{Ob}\mathcal{C}|$ кольцо эндоморфизмов равномерно ω -порожденного строго свободного $\mathcal{C}$ -модуля когерентно справа.

7. Замечания. 1°. Теорема 2 обобщает теорему 1 из (9) и теорему 3.5 из (10); теорема 3—теорему 5 из (11) и теорему 3 из (12) (см. также (13)); теорема 4—теорему 3.7 из (2); теорема 5—теорему 1 из (14) и теорему 3 из (15); теорема 6—теорему 3.9 из (6) и, наконец, теорема 7 обобщает следствие 1 из (8).

2°. В отличие от случая модулей над кольцом (см. (10), теорема 3.5; (2), теорема 3.5; (6) теорема 3.9) к списку утверждений, упоминаемых в теореме 2 (соответственно, в теореме 3, в теореме 6), нельзя добавить требование регулярности (соответственно, самоинъективности справа, полурегулярности) кольца эндоморфизмов некоторого свободного (или строго свободного) $\mathcal{C}$ -модуля бесконечного ранга.

3°. В отличие от случая модулей над кольцом (см. (2), теорема 3.5) условиям теоремы 3 не эквивалентно требование самоинъективности справа кольца эндоморфизмов любого свободного $\mathcal{C}$ -модуля.

4°. В отличие от случая модулей над кольцом (см. (8), следствие 1) свойство правой когерентности не переносится с категории $\mathcal{C}$ на кольцо эндоморфизмов любого свободного $\mathcal{C}$ -модуля. В этом смысле некоторым утешением служит теорема 7.

Вычислительный центр госплана Армянской ССР

Ա. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

Փոփոխ պրեդատիվ կատեգորիաների վրայի մոդուլների
էնդոմորֆիզմների օղակներ

Ներկա աշխատանքում փոփոխ պրեդատիվ կատեգորիաների որոշ դասերը բնութագրվում են այդ կատեգորիաների վրայի ազատ, սյրոյեկտիվ կամ այլ մոդուլների էնդոմորֆիզմների օղակների հատկությունների միջոցով: Ատանցված թևորեմները բնդհանրացնում են մի շարք հայտնի արդյունքներ, որոնք վերաբերվում են օղակի վրայի մոդուլների մասնավոր դեպքին: միևնույն ժամանակ պետք է բնդգծել, որ այդ թևորեմներից մի մասը տարրերվում է իրենց համապատասխան օղակի վրայի մոդուլներին վերաբերվող հայտնի թևորեմներից:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ *B. Mitchell*, *Adv. Math.*, 8, 1, 1—161 (1972). ² *Г. М. Бродский*, *Матем. сб.*, 91, 2, 226—242 (1974). ³ *D. Simson*, *Fund. Math.*, 96, 91—116 (1977). ⁴ *M. Harada*, *Osaka J. Math.*, 10, 3, 585—596 (1973). ⁵ *Z. Leszczynski*, preprint. ⁶ *W. K. Nicholson*, *Can. J. Math.*, 28, 5, 1105—1120 (1976). ⁷ *U. Oberst, H. Röhrl*, *J. Algebra*, 14, 1, 91—105 (1970). ⁸ *H. Lenzing*, *Math. Z.*, 114, 3, 201—212 (1970). ⁹ *Г. М. Цукерман*, *Сиб. мат. журн.*, т. 7, № 5, 1161—1167 (1966). ¹⁰ *R. Ware*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 155, 1, 233—256 (1971). ¹¹ *В. И. Геминтерн*, *Мат. зм.*, 6, 5, 533—540 (1969). ¹² *Т. С. Тольская*, *Сиб. мат. журн.*, 6, 5, 1202—1207 (1965). ¹³ *Г. М. Бродский*, *Вестн. Моск. ун-та. матем.-мех.*, 3, 106 (1974). ¹⁴ *В. Стефенсон, Г. М. Цукерман*, *Сиб. мат. журн.*, 11, 1, 228—232 (1970). ¹⁵ *H. Lenzing*, *Math. Z.*, 118, 3, 219—240 (1970).