ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 4

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян, К. М. Моссесян

О панцикличности регулярных орграфов

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 30/VII 1978)

В настоящей статье придерживаемся терминологии, принятой в книге Харари ([1]). Под словом „орграф" всюду будем понимать конечный направленный граф.

В работах Гордона, Эрдёша и Хоббса ([2]) доказаны гамильтоновость некоторых классов конечных неориентированных регулярных графов. В предлагаемой работе рассмотрена аналогичная задача для орграфов, и для всякого $n \geq 8$ доказана панцикличность любого $(2n+1)$—вершинного $(n-1)$—регулярного орграфа. Кроме того, при $n \geq 5$, для таких орграфов доказано существование орциклов (контуров) всех длин, не более $2n$.

Орграф G называется k—регулярным, если для любой его вершины v имеет место $od(v)=id(v)=k$, где $od(v)$ (соответственно $id(v)$)—полустепень исхода (захода) вершины v.

Для любых подмножеств $A,B \subseteq V(G)$ орграфа введем следующие обозначения:

$$E(A-B)=|(u,v)\in E(G)/u\in A,\ v\in B|,$$

$$E(A,B)=E(A\to B)\cup E(B\to A).$$

$A\to B$ означает, что $(u,v)\in E(G)$ для всех $u\in A$ и $v\in B$.

Через C_r (соответственно P_r) обозначим орцикл (путь) длины r, а $V(C_r)$—множества вершин орцикла C_r.

Для любого орцикла C_r из G и для любых вершин $u\in V(G)$, $\tau\in V(G)\setminus V(C_r)$ введем обозначения:

$$\beta(x,C_r)=r-|E(|x|,\ V(C_r))|,\ A(C_r)=V(G)\setminus V(C_r),$$

$$S^+(u)=|v\in V(G)/(u,v)\in E(G)|,\ S^-(u)=|v\in V(G)/(v,u)\in E(G)|.$$

$|u^1,\ldots,u^k|$, где $k=|V(G)|-od(u)-id(u)-1$, означает множество несмежных с u вершин графа G.

Через Φ_k^p обозначим множество p—вершинных орграфов, содержащих орцикл длины k.

$H \subset G$ означает, что H—подграф орграфа G.

Всюду под G будем понимать произвольный $(2n-1)$—вершинный $(n-1)$—регулярный орграф с множеством вершин $V(G)$ и множеством дуг $E(G)$.

Теорема 1. *Для любых $n \geqslant 5$ и $r \in |3,2n|$ орграф G содержит орцикл длины r.*

Теорема 2. *Для любого $n \geqslant 8$ орграф G—панциклический.*

Дадим схему доказательства теорем 1 и 2 в виде последовательности лемм 1—10.

Замечание 1. По принципу ориентированной двойственности (1) утверждения всех лемм останутся справедливыми, если в их формулировках заменить выражение $|E(|x| \to V(C_r))|$ на $|E(V(C_r) \to |x|)|$.

Лемма 1. *Для любых $n \geqslant 4$, $r \geqslant 3$ и $q \in |1,r|$, если $P_{q-1} = (u_1, \ldots, u_q) \subset \langle V(G) \setminus V(C_r) = (v_1, \ldots, v_r) \rangle$ и для некоторого $i \in |1,r|$ имеет место $(v_i, u_1), (u_q, v_{(q+i) \bmod (r)}) \in E(G)$, то $G \in \Phi_{r+1}^{2n+1}$.*

Лемма 2. *Для любых $n \geqslant 4$ и $r \geqslant 3$, если существует $C_r \subset G$ такой, что для всякой $x \in A(C_r)$ имеет место $\beta(x, C_r) = 2$, то $|A(C_r)| \leqslant r$.*

Лемма 3. *Для любых $n \geqslant 5$ и $r \geqslant 4$, если существует $C_r \subset G$ и $x \in A(C_r)$ такие, что $|E(|x| \to v(C_r))| = 0$, то $G \in \Phi_{r+1}^{2n+1}$.*

Лемма 4. *Для любых $n \geqslant 5$ и $r \geqslant 3$, если существует $C_r \subset G$ такое, что $|A(C_r)| \geqslant 4$ и для некоторой $x \in A(C_r)$ имеет место $|E(|x| \to V(C_r))| = n-1$, то $G \in \Phi_{r+1}^{2n+1}$.*

Лемма 5. *Если $n \geqslant 5$, то для любого $r \in |3,6|$ имеет место $G \in \Phi_{r+1}^{2n+1}$.*

Лемма 6. *Для любых $n \geqslant 5$ и $r \geqslant 6$, если существует $C_r \subset G$ такое, что для некоторой $x \in A(C_r)$ имеет место $\beta(x, C_r) = 1$ или $E(|x| \to V(C_r))| = 1$, то $G \in \Phi_{r+1}^{2n+1}$.*

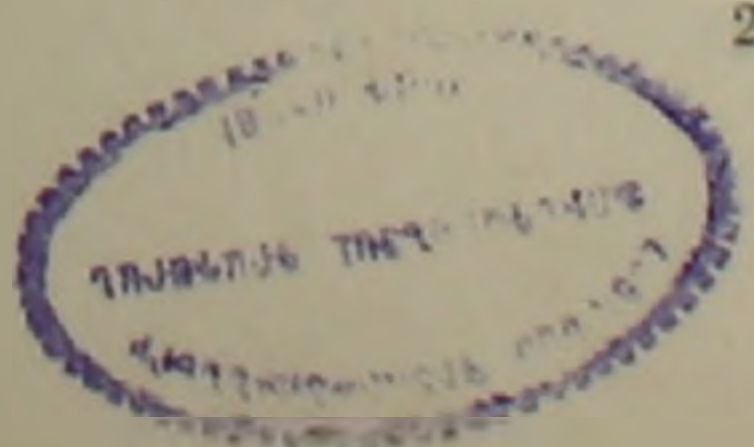
Лемма 7. *Для любых $n \geqslant 5$ и $r \geqslant 6$, если существует $C_r \subset G$, такое что $|A(C_r)| \geqslant 4$ и для некоторой $x \in A(C_r)$ имеет место $|E(|x| - V(C_r))| = 2$ или $E(|A(C_r) \cap S^+(x)| \to |A(C_r) \cap S^-(x)|) = \Phi$, то $G \in \Phi_{r+1}^{2n+1}$.*

Лемма 8. *Для любых $n \geqslant 5$ и $r \geqslant 6$, если существует $C_r \subset G$ и $C_3 \subset \langle A(C_r) \rangle$, то $G \in \Phi_{r+1}^{2n+1}$.*

Лемма 9. *Для любого $n \geqslant 5$, если существует $C_r \subset G$ такое, что $2 \leqslant |A(C_r)| \leqslant 3$, то $G \in \Phi_{r+1}^{2n+1}$.*

Лемма 10. *Для любого $n \geqslant 8$, если существует $C_r \subset G$ такое, что $|A(C_r)| = 1$, то $G \in \Phi_{r+1}^{2n+1}$.*

Утверждения лемм 1 и 2 очевидны. Леммы 3—7 и 9 (для случая $|A(C_r)| = 3$) доказываются упорядоченным перебором. Для иллюстрации вкратце докажем часть леммы 7. Пусть $n \geqslant 5$ и $r \geqslant 6$—произвольные числа и существует подграф C_r графа G такой, что $|A(C_r| \geqslant 1$ и



для некоторой вершины $x \in A(C_r)$ имеет место $|E(|x| \to V(C_r))| = 2$. Допустим, что $G \overline{\in} \Phi^{2n+1}_{r+1}$. По леммам 3,4 и 6, для любого $y \in A(C_r)$ имеет место $|E(|y| \to V(C_r)) \overline{\in} |0,1, n-1|$, $|E(V(C_r) \to |y|) \overline{\in} |0,1,n-1|$ и $\rho(y, C_r) = 2$. По лемме 2, $|A(C_r)| \leqslant r$. Следовательно $n+1 \leqslant r \leqslant n+2$, $\langle A(C_r) \rangle$ является турниром и началом цикла $C_r = (v_1, \ldots, v_r v_1)$ мы могли выбрать так, чтобы $(v_1, x) \in E(G)$, $v_2 = x^1$ и $(v_3, x) \overline{\in} E(G)$. Легко заметить, что $|A(C_r) \cap S^+(x)| = n-3$, $1 \leqslant |A(C_r) \cap S^-(x)| \leqslant 2$ и, пользуясь леммой 1 получаем следующее соотношение: $2 \leqslant |A(C_r) \cap S^+(x)| \leqslant 3$. Следовательно, $5 \leqslant n \leqslant 6$.

1) $n = 6$.

Нетрудно заметить, что $|A(C_r) \cap S^+(x)| = 3$, $|A(C_r) \cap S^-(x)| = 2$, $r = 7$, $|A(C_r) \cap S^+(x)| \to |A(C_r) \cap S^-(x)|$ и $\langle A(C_r) \cap S^+(x) \rangle$ является циклической тройкой. Очевидно $E(|v_3| \to |A(C_r) \cap S^+(x)|) \neq \varnothing$ и пусть $(v_7, y_2) \in E(|v_3| \to |A(C_r) \cap S^+(x)|)$.

Тогда $C_8 = (v^5, y_1, y_2, z_1, z_2, x, v_3, v_4, v_5) \subset G$ или $C_8 = (v_5, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, x, v_1, v_5) \subset G$, где $P_1 = (z_1, z_2) \subset \langle A(C_r) \cap S^-(x) \rangle$, $P_2 = (y_1, y_2, y_3) \subset \langle A(C_r) \cap S^+(x) \rangle$, соответственно для случаев $(x, v_3) \in E(G)$ и $(x, v_4) \in E(G)$. Отсюда следует $G \in \Phi^{2n+1}_{r+1}$, что противоречит предположению $G \overline{\in} \Phi^{2n+1}_{r+1}$

2) $n = 5$.

Доказывается аналогичным образом.

Для доказательства лемм 8,10 и 9 (для случая $|A(C_r)| = 2$) рассматриваются отдельные случаи, используя следующее:

Замечание 2. Для любых $n \geqslant 5$ и $r \geqslant 4$, если существует такой орцикл $C_r = (v_1, v_2, \ldots, v_r, v_1) \subset G$, что для любой $x \in A(C_r)$ имеет место $\rho(x, C_r) = 2$, $E(|x| \to V(C_r)) \neq \varnothing$, $E(V(C_r) \to |x|) \neq \varnothing$ и для любого $i \in |1,r|$, если $(v_i, x) \in E(G)$, то $(x, v_{(i+1) \bmod (r)}) \overline{\in} E(G)$. Тогда возможны только следующие случаи I—IV (с точностью до выбора начальной вершины цикла C_r и переориентации всех дуг):

I) $\exists s \in |2, r-2|(|v_1, \ldots, v_{s-1}| \to |x| \;\&\; |x| \to |v_{s+2}, \ldots, v_r| \;\&\; |x^1, x^2| = |v_s, v_{s+1}|)$,

II) $\exists s \in |2, r-2|(|v_1, \ldots, v_{s-1}| \to |x| \;\&\; |x| \to |v_{s+1}, \ldots, v_{r-1}| \;\&\; |x^1, x^2| = |v_s, v_r|)$,

III) $\exists s \in |2, r-3|. \exists l \in |s+2, r-1|\,(|v_1, \ldots, v_{s-1}| \to |x| \;\&\; |x| \to |v_{s+1}, \ldots, v_{l-1}, v_{l+1}, \ldots, v_r| \;\&\; |x^1, x^2| = |v_s, v_l|)$,

IV) $\exists s \in |2, r-4|$, $\exists l \in |1, r-s-3|$, $\exists t \in |s+l+2, r-1|\,(|v_1, \ldots, v_{s-1}, v_{s+l+1}, \ldots, v_{t-1}| \to |x| \;\&\; |x| \to |v_{s+1}, \ldots, v_{s+l}, v_{t+1}, \ldots, v_r| \;\&\; |x^1, x^2| = |v_s, v_t|)$.

Для иллюстрации в кратце докажем случай 1) леммы 10.

Пусть $C_r = (v_1, \ldots, v_r, v_1)$ удовлетворяет условиям леммы. Заметим, что $r = 2n$ и $s = n$.

Возможны следующие случаи;

1) $\forall i \in |2, n|\,((v_{2n}, v_i) \overline{\in} E(G))$.

Очевидно, $S^+(v_{2n}) = |v_1, v_{n+1}, \ldots, v_{2n-2}|$ и $\forall i \in |2, n|. \exists t_i \in |n+1, 2n-1|\,((v_{t_i}, v_i) \in E(G))$.

1.1) $\exists i \in |1, n-2|. \exists j \in |i+2, n|\,((v_i, v_j) \in E(G))$.

Тогда $C_{2n-1} = (v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_{t_{i+1}}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, x, v_{t_{(i+1)}+1}, \ldots, v_{2n}, v_1) \subset G$.

Следовательно $G\in\Phi^{2n+1}_{r+1}$.

(1.2.) $\forall i\in|1,n-2|$, $\forall j\in|i+2,n|((v_iv_j)\overline{\in}E(G))$.

Тогда $S^-(v_n)=|v_{n+1},v_{n+2},\ldots,v_{2n-1}|$.

Если существует такое $i\in|n,2n-3|$, что $(v_i,v_1)\in E(G)$, то $C_{2n+1}=$ $=(v_{2n},v_{i+1},\ldots,v_{2n-1},v_n,\ldots,v_1,\ldots,v_{n-1},x,v_{2n})\subset G$.
Поэтому $G\in\Phi^{2n+1}_{r+1}$.

Предположим, что для любого $i\in|n.2n-3|$ имеет место $(v_i,v_1)\overline{\in}$ $E(G)$. Тогда $S^+(v_n)=|v_2,\ldots v_{n-2},v_{n+1},v_{2n}|$ и $(v_1,v_{n+1})\in E(G)$. Следовательно, $C_{2n+1}=(v_1,v_{n+1},\ldots,v_{2n-1},v_n,v_2,\ldots,v_{n-1},x,v_{2n},v_1)\subset G$, т. е. $G\in\Phi^{2n+1}_{r+1}$.

2) $\exists q\in|2,n|((v_{2n},v_q)\in E(G))$.

Если существует такое $i\in|n+1.2n-1|$, что $(v_i,v_1)\in E(G)$, то $C_{2n+1}=(v_1,\ldots,v_{q-1},x,v_{i+1},\ldots,v_{2n},v_q,\ldots,v_i\,v_1)\subset G$, т. е. $G\in\Phi^{2n+1}_{r+1}$.

Предположим, что для любого $i\in[n+1,2n-1]$ имеет место $(v_i,v_1)\in E(G)$. Тогда после переориентации всех дуг придем к случаю 1) и, следовательно, $G\in\Phi^{2n+1}_{r+1}$.

Следующий пример показывает, что в теореме 2 ограничение на n неулучшаемо (G не содержит циклов длины 4).

$G=(|1,\ldots,9|,\{|3,4,5|\to|2,6,7|,|2,6,7|\to|1,8,9|,|1,8,9|\to|3,4,5|\})$.

Предполагается, что теорема 2 верна для всех $n\geq5$.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Խ. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ, Կ. Մ. ՄՈՒՍՏՅԱՆ

Պանցիկլիկ համասեռ կողմնորոշված գրաֆների մասին

Դիտարկվում են վերջավոր կողմնորոշված, առանց զուգահեռ աղեղների և հանգույցների գրաֆներ։

Գորդոնի, Էրդյոշի և Հոբբսի ([2]) աշխատանքներում ցույց է տրվում վերջավոր համասեռ ոչ կողմնորոշված գրաֆների որոշ դասերի համիլտոնյանություն։ Ներկա հոդվածում դիտարկվում է նման խնդիր կողմնորոշված գրաֆների համար և ցանկացած $n\geq8$ բնական թվի համար, ցույց է տրվում, որ $(2n+1)$—գագաթանի կամայական $(n-1)$—համասեռ կողմնորոշված գրաֆ հանդիսանում է պանցիկլիկ, բացի դրանից ցույց է տրվում, որ $n\geq5$ համար կամայական կողմնորոշված գրաֆները պարունակում են $2n$-ից ոչ մեծ ցանկացած երկարությամբ կողմնորոշված ցիկլ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ф. Харари*, „Теория графов", М. „Мир", 1973. [2] *P. Erdös and A. M. Hobbs.* Hamiltonian Cycles in Regular Graphs of Moderate Degree, J. of Combin. Theory B23. 139—142. 1977.