

УДК 510.66

МАТЕМАТИКА

М. А. Хачатрян

О сложности по выводимости некоторых формул в секвенциальных исчислениях

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 12/VI 1978)

В этой статье устанавливаются точные оценки сложности по выводимости пропозициональных формул вида

$$p_1 \vee (p_2 \vee (p_3 \vee \dots \vee (p_{n-1} \vee p_n) \dots)) \supset (\dots ((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \vee \dots \vee p_{n-1}) \vee p_n, \quad (1)$$

$$p_1 \& (p_2 \& (p_3 \& \dots \& (p_{n-1} \& p_n) \dots)) \supset (\dots ((p_1 \& p_2) \& p_3) \& \dots \& p_{n-1}) \& p_n \quad (2)$$

в классическом и интуиционистском секвенциальном исчислении с сечением и без сечения; при этом сложность вывода в секвенциальном исчислении понимается как количество различных секвенций, входящих в этот вывод, и сложность секвенции по выводимости понимается как минимум сложности всевозможных ее выводов; сложность $L(A)$ формулы A по выводимости понимается как аналогичная сложность секвенции $\rightarrow A$. Мы установим, что для формул A_n и B_n вида (1) и (2) имеют место соотношения*: $L(A_n) \asymp L(B_n) \asymp n$ в исчислениях с сечением; $L(A_n) \asymp n^2$, $L(B_n) \asymp n \log n$ в интуиционистском исчислении без сечения; $L(A_n) = L(B_n) \asymp n \log n$ в классическом исчислении без сечения. Нижние оценки $n \log n$ получены с помощью одной комбинаторной задачи, представляющей и некоторый самостоятельный интерес. А именно, указывается метод нахождения функции f , заданной на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, принимающей значения из того же множества, удовлетворяющей условиям $f(k) \leq k$, $f(n) = n$ и минимизирующей в зависимости от n порядка роста функционала

$$L_n(f) = f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} [f(k) + |i|(i \neq 0) \& f(k+i) - f(k) \geq i)]. \quad (3)$$

Доказывается, что этот порядок есть $c \cdot n \log n$. Результаты, сформулированные в теоремах 1, 2, частично представлены в тезисах докла-

* Соотношение $f(n) \asymp g(n)$ понимается здесь, как обычно, в смысле $\exists c \exists d \forall n (f(n) < c g(n) + d) \& \exists c \exists d \forall n (g(n) < c f(n) + d)$.

дов IV Всесоюзной конференции по математической логике ⁽¹⁾.
Переходим к точным определениям и формулировкам.

Пусть $G1(G3)$ есть классическая формальная система обозначенная таким же образом в ⁽²⁾, без дополнительных логических правил вывода для исчисления предикатов (классическое исчисление высказываний), а соответствующую интуиционистскую систему обозначим через $G1I(G3I)$. Если S — некоторая формальная система, то через S' обозначим формульную систему, полученную из S опусканием правила вывода сечения.

Для любого натурального числа $n > 2$ пусть Q_n есть следующая секвенция:

$$p_1 \vee (p_2 \vee (p_3 \vee \dots \vee (p_{n-1} \vee p_n) \dots)) \rightarrow \\ \rightarrow (\dots ((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \vee \dots \vee p_{n-1}) \vee p_n,$$

а R_n есть секвенция

$$p_1 \& (p_2 \& (p_3 \& \dots \& (p_{n-1} \& p_n) \dots)) \rightarrow (\dots ((p_1 \& p_2) \& p_3) \& \dots \& p_{n-1}) \& p_n,$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — пропозициональные переменные.

Теорема 1. Сложность по выводимости секвенций Q_n и R_n в формальных системах $G1, G1I, G3$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$L(Q_n) \preceq n, \quad L(R_n) \preceq n.$$

Теорема 2. Сложность по выводимости секвенций Q_n и R_n удовлетворяет следующим соотношениям:

$$L(Q_n) \preceq n^2, \quad L(R_n) \preceq n \log n$$

в случае формальной системы $G1I'$, и $L(Q_n) \preceq n^2, \quad L(R_n) \preceq n$ в случае формальной системы $G3I$.

Теорема 3. Сложность по выводимости секвенций Q_n и R_n в формальной системе $G1'$ удовлетворяет соотношениям

$$L(Q_n) \preceq L(R_n) \preceq n \log n.$$

Доказательства нижних оценок в теоремах 1—3 получаются из нижеследующих лемм 1—6; соответствующие верхние оценки получаются построением конкретных выводов.

Лемма 1. Для любого натурального числа $n > 2$ сложность по выводимости секвенции R_n в формальной системе $G1$ больше, чем n .

Доказательство получается посредством рассмотрения множества формул $\tau(Q)$ для любой секвенции Q , где множество $\tau(\Phi)$ для любой формулы Φ определяется так же, как в ⁽³⁾, и если Q есть секвенция $A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_m$, то $\tau(Q) = \bigcap_{i=1}^m \tau(B_i) \setminus \bigcup_{j=1}^n \tau(A_j)$.

Остается отметить, что $\tau(\overline{R_n}) = n - 1$, $\tau(\overline{Q}) = 0$ для любой аксиомы Q , и при каждом применении правил вывода G1 соответствующее τ -множество нижней секвенции по сравнению с суммой τ -множеств верхних секвенций увеличивается не более чем на одну формулу.

Пусть A некоторая формула исчисления высказываний. Определим двойственную для A формулу A^+ индукцией по построению формулы A . Если A есть пропозициональная переменная, то $A^+ = A$; $(B \vee C)^+ = B^+ \& C^+$; $(B \& C)^+ = B^+ \vee C^+$; $(\neg B)^+ = \neg B^+$; $(B \supset C)^+ = \neg(C^+ \supset B^+)$.

Далее, если Q есть секвенция $A_1, A_2, \dots, A_n \rightarrow B_1, B_2, \dots, B_m$, то секвенцией, двойственной для секвенции Q , называется следующая секвенция Q^+ : $B_m^+, B_{m-1}^+, \dots, B_1^+ \rightarrow A_n^+, A_{n-1}^+, \dots, A_2^+, A_1^+$.

Отметим, что введенное понятие двойственной формулы является более общим чем обычно употребляемое понятие из (3).

Лемма 2. Если в формальной системе $G1(C1', G3)$ выводима секвенция Q , то в $G1(G1', G3)$ выводима также двойственная ей секвенция Q^+ , причем вывод секвенции Q^+ получается из вывода секвенции Q взаимной заменой правил вывода $\rightarrow \neg$ и $\neg \rightarrow$, $\neg \vee$ и $\& \rightarrow$, $\vee \rightarrow$ и $\neg \&$; кроме того, правило вывода $\neg \supset$ заменяется на $\rightarrow \supset$ с последующим применением правила $\neg \neg$, и, соответственно, правило $\supset \rightarrow$ заменяется на $\supset \rightarrow$, с последующим применением $\neg \neg$; структурные правила вывода заменяются аналогичными правилами, получаемыми из исходных правил заменой термина „сукцедент“ на „актецедент“ и обратно; правило сечения сохраняется в том же месте вывода.

Следствие. Если секвенция Q не содержит знака импликации, то в формальных системах $G1'$ и $G3$ имеет место $L(Q) = L(Q^+)$.

Пусть S — одна из формальных систем $G1'$, $G1''$, $G3'$, а Σ — вывод секвенции Q_n в формальной системе S .

Говорим, что вывод Σ в данной секвенции Q разветвляется по пропозициональной переменной p_i , если Σ в этой части имеет вид

$$\frac{p_i, \Gamma \rightarrow \Delta \quad \vee_{n-1}, \Gamma \rightarrow \Delta}{\vee_{n-1+1}, \Gamma \rightarrow \Delta}, \quad (\vee \rightarrow)$$

где Γ, Δ — списки формул, Q есть секвенция $\vee_{n-1+1}, \Gamma \rightarrow \Delta$, а $\vee_{n-1}$ есть обозначение для формулы

$$p_{i+1} \vee (p_{i+2} \vee \dots \vee (p_{n-1} \vee p_n) \dots), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Часть вывода, стоящую над секвенцией $p_i, \Gamma \rightarrow \Delta$, включая эту секвенцию, назовем левой ветвью данного разветвления по p_i ; часть, стоящую над секвенцией $\bigvee^n \Gamma, \Gamma \rightarrow \Delta$, включая эту секвенцию, назовем правой ветвью данного разветвления по p_i .

i -ветвью начинающейся с секвенции R , называется ветвь в выводе Σ , получаемая следующим образом: начиная с секвенции R в выводе Σ движемся вверх, если встречается разветвление по некоторой пропозициональной переменной p_k , то выбираем левую ветвь по ветвлению p_k при $k=i$ и выбираем правую ветвь при $k < i$.

i -ой узловой секвенцией вывода Σ , ($i=2,3,\dots,n-1$), называется самая первая секвенция i -ветви, начинающаяся с $(i-1)$ -ой узловой секвенции, после которой в антецедент всех секвенций i -ветви входит формула p_i . Первая узловая секвенция определяется аналогично i -ой ($i > 1$) исходя из секвенции Q_n вместо $(i-1)$ -ой узловой секвенции в определении $(i-1)$ -ой узловой секвенции.

Лемма 3. Для любого натурального числа $n > 2$ если Σ есть вывод секвенции Q_n в формальных системах $G1'$ или $G3'$ или $G1''$, то в выводе Σ существуют в точности $n-1$ узловых секвенций, и именно, узловые секвенции с номерами $1, 2, \dots, n-1$. Для любых натуральных чисел i, j ($i, j < n$) в i -ой узловой секвенции происходит разветвление вывода Σ по пропозициональной переменной p_i , причем если $i \neq j$, то секвенции, стоящие на левых ветвях разветвлений i -ой и j -ой узловых секвенций различны.

Лемма 4. В условиях леммы 3, если Σ есть вывод секвенции Q_n в формальных системах $G1'$ или $G3'$, то для любого натурального числа $i < n$ на левой ветви разветвления i -ой узловой секвенции число секвенций не меньше числа $n-i+1$.

Для любого натурального числа n пусть M_n есть множество функций f , определенных на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, принимающих значения из того же множества, и таких, что для любого натурального числа $k \leq n$ $f(k) \leq k$ и $f(n) = n$. Пусть функция $L(n)$ определена следующим образом:

$$L(n) = \min_{f \in M_n} L_n(f),$$

где $L_n(f)$ есть функционал, определенный равенством (3).

Лемма 5. Для любого натурального числа $n > 2$ сложность вывода секвенции Q_n в формальной системе $G1'$ не меньше $L(n)$.

Лемма 6. Для любого натурального числа n

$$L(n) \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \log_2 n \right\rfloor + 2n - 1.$$

Лемма 7. Для любого натурального числа m

$$L(2^m) \leq (m+1)2^m.$$

Доказательство леммы 7 основано на следующем факте. Если функция f такова, что для любого натурального числа $k \leq 2^m$, $f(k)$ есть наибольшая степень двойки, на которую делится k , то

$$L_2^m(f) = (m+1) 2^m.$$

Отметим, что указанная функция f используется также в построении вывода секвенции Q_n в формальной системе $G1'$, обеспечивающего верхнюю оценку $cn \log n$.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Մ. Հ. ԿԱԶԱՏՐՅԱՆ

Արտաձման բարդությունը հատույթով և առանց հատույթի ձևային
համակարգերում

Ապացուցվում է, որ դիզյունկցիայի ընդհանրացված բաշխական օրենքի՝

$$p_1 \vee (p_2 \vee (p_3 \vee \dots \vee (p_{n-1} \vee p_n) \dots)) \supset$$

$$\supset (\dots ((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \vee \dots \vee p_{n-1}) \vee p_n.$$

արտաձման բարդությունը (արտաձման մեջ օգտագործվող իրարից տարրեր սեկվենսնների թիվը) դասական $G1$, $G3$ և ինտուիցիոնիստական $G1I$ հատույթի արտաձման կանոնը պարունակող ձևային համակարգերում n -ի կարգի մեծություն է. նույն օրենքի արտաձման բարդությունը առանց հատույթի $G1'$, $G3I$ ինտուիցիոնիստական համակարգերում n^2 կարգի մեծություն է. իսկ առանց հատույթի $G1'$ դասական հաշվում $n \log n$ կարգի մեծություն է: Ստացված են արտաձման բարդության զնահատականներ նաև կոնյունկցիայի ընդհանրացված օրենքի համար:

Կախված n բնական թվից, զնահատված է հետևյալ արտահայտության արժեքը.

$$\min \left| f(n) + \sum_{k=1}^{n-1} [f(k) + \mu i | i \neq 0 \& (f(k+i) - f(k) \geq i) | \right|,$$

որտեղ f -ը $N \rightarrow N$ տիպի ֆունկցիա է, $f(n) = n$ և $\forall k (f(k) \leq k)$:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. А. Хачатрян, Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции по математической логике, 151, Кишинев, 1976. ² С. К. Клини, Введение в метаматематику, II/1, М., 1957. ³ Г. С. Цейтлин, А. А. Чубарян, Труды ВЦ АН Арм. ССР и ЕГУ, «Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники», VIII, 57—64 (1975).