ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ

LXVII 1978 4

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

З. А. Карсян

Минимальное разложение орграфа на орлеса

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 29/V 1978)

Задача разложения графов на наименьшее число реберно непересекающихся ациклических суграфов* (это число называется древесностью) впервые рассматривалась в работе Нэш-Вильямса ([2]), где, в частности, получена формула для вычисления древесности графа. Позже, Эдмондс ([3]) получил эффективный алгоритм, который, в частности, разбивает граф на наименьшее число ациклических суграфов.

Пусть $\bar{L}=(X,\bar{U})$ конечный орграф без петель и кратных дуг. Если $x\in X$, то через $V^-_{\bar{L}}(x)$ обозначим число дуг орграфа $\bar{L}=(X,\bar{U})$ входящих в вершину x.

Суграф $\bar{T}=(X,\bar{U}_1)$ назовем ориентированным лесом (орлесом) орграфа $\bar{L}=(X,\bar{U})$, если для каждой вершины $x\in X$ имеет место $V^-_{\bar{T}}(x)\leqslant 1$ и $\bar{T}$ не содержит орциклов. Если $V^-_{\bar{T}}(x)=0$, то x назовем корнем орлеса $\bar{T}$.

Мощность минимального множества попарно не пересекающихся по дугам орлесов, покрывающих данный орграф, назовем ориентированной древесностью (ордревесностью) этого орграфа. Если $\bar{L}=(X,\bar{U})$ некоторый орграф, то через $\bar{R}(\bar{L})$ (соответственно $R(L)$) обозначим его ордревесность (древесность неориентированного графа $L=(X,U)$).

В настоящей работе, для любого орграфа $\bar{L}=(X,\bar{U})$ устанавливается связь между $\bar{R}(\bar{L})$ и $R(L)$, а также дается практически эффективный алгоритм разбиения $\bar{L}$ на $\bar{R}(\bar{L})$ орлесов.

Обозначим $\Delta(\bar{L})=\max\limits_{x\in\bar{L}} V^-_{\bar{L}}(x)$ и вершину $x\in X$, для которой $V^-_{\bar{L}}(x)=\Delta(\bar{L})$ назовем максимальной.

В работе ([4]) доказано, что

$$\Delta(\bar{L})\leqslant\bar{R}(\bar{L})\leqslant\Delta(\bar{L})+1 \tag{1}$$

Теорема 1. *Для любого орграфа $\bar{L}$ имеет место:*

* В настоящей статье мы придерживаемся терминологии, принятой в книге ([1]), где можно найти все не определяемые здесь, понятия.

$$\bar{R}(\bar{L}) = \begin{cases} \Delta(\bar{L}) \Leftrightarrow R(L) \leq \Delta(\bar{L}) \\ \Delta(\bar{L}) + 1 \Leftrightarrow R(L) > \Delta(\bar{L}) \end{cases}$$

Для доказательства теоремы, пользуясь неравенствами (1) и $R(L) \leqslant \bar{R}(\bar{L})$ достаточно показать, что из $\bar{R}(\bar{L}) = \Delta(\bar{L}) + 1$ следует $R(L) > \Delta(\bar{L})$. Предположим обратное и пусть для орграфа $\bar{L} = (X, \bar{U})$ имеют место $\bar{R}(\bar{L}) = \Delta(\bar{L}) + 1$ и $R(L) \leq \Delta(\bar{L})$.

К орграфу $\bar{L}$ применим следующий алгоритм;

Рассмотрим подграф $\bar{L}_0 = (X_0, \bar{U}_0)$ порожденный множеством максимальных вершин орграфа $\bar{L} = (X, \bar{U})$. Через $\bar{L}_0^i = (X_0^i, \bar{U}_0^i)$ $(i = 1, \dots, k)$ обозначим базовые бикомпоненты орграфа $\bar{L}_0$.

а) Пусть для всех чисел i в подграфе $\bar{L}_0^i$ существует вершина $x_i \in X_0^i$ такая, что $V^-_{\bar{L}_0^i}(x_i) < \Delta(\bar{L})$. Выберем вершины $x_1, x_2, \dots, x_k$ в качестве корней и выделим из орграфа максимальный орлес $\bar{T}$ т. е. орлес, имеющий максимальное количество дуг ([4], лемма 1)).

Из базовых бикомпонент орграфа $\bar{L}$ выберем по одной произвольной не максимальной вершины в качестве корней и построим максимальный орлес $\bar{T}_{j+1}$ (где j—количество уже выделенных орлесов из $\bar{L}$), включающий T'.

Обозначим $\bar{L} = \bar{L} \setminus \bar{T}_{j+1}$ и перейдем к началу алгоритма.

б) Пусть в некоторой базовой бикомпоненте $\bar{L}_0^{i_0} = (X_0^{i_0}, \bar{U}_0^{i_0})$ подграфа $\bar{L}_0$ для любой вершины $x \in X_0^{i_0}$ имеет место $V^-_{\bar{L}_0^{i_0}}(x) = \Delta(\bar{L})$. Среди выделенных орлесов $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_r$ существует орлес $\bar{T}_{r_0}$ такой, что его подграф $\bar{T}_{r_0}(X_0^{i_0})$, порожденный множеством вершин $X_0^{i_0}$ не образует растущее ордерево (в обратном случае из формулы Нэш-Вильямса ([2]) и неравенства $R(L) \leq \Delta(\bar{L})$ получается противоречие) и пусть y_0— один из корней $\bar{T}_{r_0}(x_0^{i_0})$. Выберем в $\bar{L}_0^{i_0}$ растущее ордерево $\bar{H}_{r_0}$ с корнем y_0.

Через $\bar{\bar{T}}_{r_0}$ обозначим орлес, полученный из $\bar{T}_{r_0}$ удалением всех дуг, входящих в вершины $X_0^{i_0} \setminus \{y_0\}$ и добавлением всех дуг из $\bar{H}_{r_0}$.

Таким образом, используя описанный процесс замены дуг в уже выделенных орлесах, можно с помощью пункта а) разложить орграф $\bar{L} = (X, \bar{U})$ на $\Delta(\bar{L})$ орлеса, т. е. $\bar{R}(\bar{L}) = \Delta(\bar{L})$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

З а м е ч а н и е 1. Если в процессе работы описанного алгоритма в некоторой базовой бикомпоненте $\bar{L}_0^{i_0} = (X_0^{i_0}, \bar{U}_0^{i_0}$ орграфа $\bar{L}_0$ для любой вершины $x \in X_0^{l_0}$ имеет место $V_{\bar{L}_0}^{-l_0}(x)=\Delta(\bar{L})$ и все уже выделенные орлеса на множестве $X_0^{l_0}$ дают растущие ордеревья, то по формуле Нэш-Вильямса $R(L)>\Delta(\bar{L})$ и, следовательно, по теореме 1, $\bar{R}(\bar{L})=\Delta(\bar{L})+1$.

В этом случае орграф $\bar{L}$ с помощью алгоритма из работы ([1]) можно разложить на $\bar{R}(\bar{L})$ орлесов.

Замечание 2. Доказательство теоремы 1 и замечание 1 дают алгоритм разложения любого орграфа на наименьшее число орлесов. Легко заметить, что описанный алгоритм имеет порядок n^3 где n — количество вершин рассматриваемого орграфа.

Следствие. *Для любого орграфа $\bar{L}=(X,\bar{U})$ равенство $\bar{R}(\bar{L})=R(L)$ имеет место тогда и только тогда, когда $R(L)>\Delta(\bar{L})$.*

Орграф $\bar{L}=(X,\bar{U})$ назовем p-критическим, где $p>2$, если он не имеет изолированных вершин, $\bar{R}(\bar{L})=p$ и для любой дуги $u\in\bar{U}$ имеет место $\bar{R}(\bar{L}_1)=(X,\bar{U}\setminus\{u\})=p-1$.

Для любого $p>2$ введем следующие обозначения:
$A_p=\{\bar{L}=(X,\bar{U})/\bar{L}$ есть p-критический и $\forall x\in X(V_{\bar{L}}^-(x)\leq p-1)\}$ $B_p=\{\bar{L}=(X,\bar{U})/\bar{L}$ есть p-критический и $\exists x\in X(V_{\bar{L}}^-(x)=p)\}$

Орлес $\bar{T}=(X,\bar{U}_1)$ орграфа $\bar{L}=(X,\bar{U})$ назовем оркаркасом для $\bar{L}$, если $\bar{T}$ имеет всего один корень.

Каркасным числом орграфа $\bar{L}=(X,\bar{U})$ назовем наибольшее число непересекающихся по дугам оркаркасов орграфа $\bar{L}$. Через $\bar{K}(\bar{L})$ обозначим каркасное число орграфа $\bar{L}$.

Докажем, что имеет место.

Теорема 2. *Для любого $p>2$ орграф $\bar{L}=(X,\bar{U})$ принадлежит классу A_p тогда и только тогда, когда для любой дуги $\bar{u}\in\bar{U}$ имеет место*

$$\bar{K}(\bar{L}_0)=(X,\bar{U}\setminus\{\bar{u}\})=\bar{R}(\bar{L}_0)=(X,U\setminus\{u\})=p-1 \qquad (2)$$

Пусть $p>2$ — любое целое и $\bar{L}=(X,\bar{U})$ — произвольный орграф класса A_p. По теореме 1 $R(L)=\bar{R}(\bar{L})=p$. Очевидно древесность графа $L=(X,U)$ уменьшается при удалении любого его ребра. Следовательно, пользуясь формулой Нэш-Вильямса ([2]), получим следующие равенства:

$$\left\lceil\frac{|U|}{|X|-1}\right\rceil=p \quad \text{и} \quad \left\lceil\frac{|U|-1}{|X|-1}\right\rceil=p-1.$$

Отсюда следует, что $|U|=(p-1)(|X|-1)+1$ и, следовательно, имеет место (2).

Пусть $p>2$ и для любой дуги $\bar{u}\in\bar{U}$ произвольного орграфа $\bar{L}=(X,\bar{U})$ имеет место (2). Очевидно $\bar{R}(\bar{L})=p$, т. е. орграф $\bar{L}$ является

p-критическим. С другой стороны, $V_{\bar{L}}(x) \leq p-1$ для любой вершины $x \in X$, т. к., в противном случае орграф $\bar{L}$ не является p-критическим или нарушается равенство (2). Следовательно, $\bar{L}=(X,\bar{U}) \in A_p$.

Теорема доказана.

Замечание 3. Для любого $p \geq 1$ орграф $\bar{H}=(Y,\bar{V})$ принадлежит классу B_p тогда и только тогда, когда он изоморфен некоторому орграфу $\bar{L}=(X,\bar{U})$, где $X=\{x_0,x_1,\ldots,x_p\}$; $\bar{U}=\{\overrightarrow{(x_i,x_0)}/i=\overline{1,p}\}$.

Из этого замечания видно, что орграфы из B_p являются только $(p+1)$ вершинные „входящие звезды". Естественно возникает вопрос: каковы порядки (количества вершин) графов из A_p? Следующая теорема, в частности, отвечает на этот вопрос:

Теорема 3. *Для любого $p \geq 2$ в классе A_p существует n-вершинный орграф тогда и только тогда, когда $n \geq 2p-1$.*

Пусть $\bar{L}=(X,\bar{U}) \in A_p$, где $p \geq 2$ и $|X|=n$. По теореме 1, $R(L)=p$. Так как $R(L) \leq R(K_n)=\left]\frac{n}{2}\right[$, то $n \geq 2p-1$.

Пусть, теперь, $p \geq 2$ и $n \geq 2p-1$ произвольные числа. Через $L_0=(X_0, U_0)$ обозначим n-вершинный граф, полученный из полного графа K_n удалением ребер и со следующими свойствами:

$$R(L_0)=p;\ \forall u \in U_0 [R(X_0, U_0 \setminus \{u\})=p-1]. \qquad (3)$$

Пусть $(x, y) \in U_0$ — произвольное ребро и $T_1, \ldots, T_{p-1}$ разложение графа $L_1=(X_0, U_0 \setminus \{x, y\})$ на ациклические суграфы. Через $\bar{L}_0=(X_0,\bar{U}_0)$ обозначим орграф, полученный из L_0 следующей ориентацией: ребро (x,y) ориентировано от x, а остальные ребра ориентированы таким образом, что в $\bar{L}_0$ все суграфы $\bar{T}_1,\ldots,\bar{T}_{p-1}$ являются орлесами с корнем y. Очевидно $\Delta(\bar{L}_0) \leq p-1$. Пусть $\bar{u}_1 \in \bar{U}_0$ — произвольная дуга и $\bar{L}_2=(X_0,\bar{U}_0 \setminus \{u_1\})$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $\bar{R}(\bar{L}_2)<p$.

Предположим обратное, т. е. $\bar{R}(\bar{L}_2)=p$. Поскольку $\Delta(\bar{L}_2) \leq \Delta(L_0) < p=\bar{R}(\bar{L}_2)$, то по теореме 1, $R(L_2)=p$, что противоречит свойствам (3).

Теорема доказана.

Замечание 4. По принципу ориентированной двойственности ([3]) легко убедиться в справедливости теорем, двойственных к доказанным.

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Զ. Ռ. ԿԱՐԵՅԱՆ

Կողմնորոշված գրաֆի տրոհումը նվազագույն թվով կողմնորոշված անտառների

$\bar{L}$ կողմնորոշված գրաֆի մեջ իրար հետ աղեղներով չհատվող կողմնորոշված անտառների նվազագույն քանակը, որոնք ծածկում են $\bar{L}$ գրաֆը, անվանենք $\bar{L}$-ի կողմնորոշված ծառայնություն և նշանակենք $R(\bar{L})$-ով։ Սովորական գրաֆի $R(L)$ ծառայնության համար Նեշ-Վիլյամսի կողմից ստացվել է բանաձև (2), իսկ հետագայում Էդմոնդսը առաջարկել է գրաֆը նվազագույն՝ $R(L)$ թվով, ցիկլազերծ մասերի (անտառների) տրոհելու արդյունավետ ալգորիթմ (3)։

Ներկա աշխատանքում բացահայտվում է $\bar{R}(\bar{L})$ կողմնորոշված ծառայնության և $R(L)$ ծառայնության կապը, տրվում է $\bar{L}$ գրաֆը $\bar{R}(\bar{L})$ թվով կողմնորոշված անտառների տրոհելու արդյունավետ ալգորիթմ, ինչպես նաև հետազոտվում է ըստ կողմնորոշված ծառայնության սահմանային (կրիտիկական) գրաֆների դասը։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. А. Зыков*, Теория конечных графов, I, изд. „Наука", Новосибирск, 1969. [2] *Nash-Williams*, Edge—disjoint spanning trees of finite graphs, J. London Math. Soc., 36, 445—450 (1961). [3] *J. Edmonds*, Minimum partition of a matroid into independent subsets, J. res. nat. B. Stan. Sect; B 69 B 67—77 (1965). [4] *З. А. Кареян*, Сб. трудов ВЦ АН Арм. ССР и ЕрГУ, вып. 9. [5] *Ф. Харари*, Теория графов, „Мир", М., 1973.