УДК 523.035.2

АСТРОФИЗИКА

О. В. Пикичян

Задача диффузного отражения при произвольном законе перераспределения излучения по частотам

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 31/III 1978)

Задача диффузного отражения от полубесконечной плоскопараллельной среды является одной из классических задач теоретической астрофизики. Рассматривая случай монохроматического рассеяния и применяя принцип инвариантности В. А. Амбарцумян нашел решение этой задачи в виде (1,2)

$$\rho(\zeta, \eta) = \frac{\lambda}{2} \tau \frac{\varphi(\eta)\varphi(\zeta)}{\eta + \zeta}, \tag{1}$$

где: $\rho(\zeta, \eta)$ — функция диффузного отражения в вероятностной трактовке, $\arcs \cos \zeta$ и $\arcs \cos \eta$ соответственно, углы падения и отражения, $\varphi(\eta)$ — известная функция Амбарцумяна, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$\varphi(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2} \tau \varphi(\eta) \int_0^1 \frac{\varphi(\mu)}{\eta + \mu} d\mu, \tag{2}$$

Ценность такого решения состоит в том, что, во-первых, отражательная способность среды определяется без прибегания к вычислению величин, характеризующих внутренний световой режим в среде, во-вторых, функция зависящая от многих переменных выражается через функцию, имеющую меньшее количество аргументов. В дальнейшем В. В. Соболев рассмотрел эту задачу в случае полного перераспределения излучения по частотам и получил аналогичное решение (3). При рассмотрении же общего закона перераспределения задача сильно усложняется, поэтому для ее решения были разработаны облегченные методы, основанные на представлении функции перераспределения в виде билинейного разложения по некоторой системе ортонормированных функций (4):

$$r(x, x') = \sum_{k=0}^{\infty} A_k a_k(x) a_k(x'). \tag{3}$$

В результате функция диффузного отражения выражалась в виде бесконечной суммы от некоторой комбинации вспомогательных функций $H_{1k}(z)$, которые, в свою очередь, определялись из бесконечной

системы функциональных уравнений. В дальнейшем для решения подобных систем были разработаны приближенные методы (3).

Ниже мы покажем, что физика задачи допускает ее решения без использования какого-либо разложения или специального представления функции перераспределения. При этом формулы (1) и (2) обобщаются непосредственным образом. Функция диффузного отражения определяется через одну вспомогательную функцию, которая по физическому смыслу является прямым аналогом функции Амбарцумяна и удовлетворяет функциональному уравнению, аналогичному (2). Ключом для возможности такого обобщения является введение понятия вероятности выхода излученного (изотропно) на границе среды кванта и использование принципа обратимости оптических явлений. Допустим, что на границу полубесконечной плоскопараллельной среды под углом $\alpha \cos \zeta$ к нормали падает квант безразмерной частоты x_1 , и пусть функция диффузного отражения $\rho(x_1, \zeta, x_2, \eta) dx d\eta$ представляет вероятность того, что этот квант, вообще говоря, после многократных рассеяний в среде выйдет из него с частотой, заключенной между x_2 и $x_2 + dx_2$, в направлении $(\arccos \eta, 2\pi d\eta)$. Применяя принцип инвариантности в классической трактовке В. А. Амбарцумяна (2) к функции $\rho(x_1, \zeta, x_2, \eta)$, можно получить уравнение

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\alpha(x_1)}{\zeta} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta} \right| \rho(x_1, \zeta, x_2, \eta) = \frac{\lambda}{2} r(x_1, x_2) + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x_1, x') dx' \int_0^1 \rho(x', \mu', x_2, \eta) d\mu' + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} r(x'', x_2) dx'' \int_0^{\infty} \rho(x_1, \zeta, x'', \mu'') \frac{d\mu''}{\mu''} + \\ & + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' dx'' \int_0^1 \rho(x_1, \zeta, x', \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \int_0^1 \rho(x'', \mu'', x_2, \eta) d\mu''. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\varphi(x_1, x_2, \eta) dx_2 d\eta$, представляющую вероятность того, что изотропно излученный на границе среды квант частоты x_1 , вообще говоря, после рассеяний, выйдет из среды с частотой, заключенной между x_2 и $x_2 + dx_2$, в направлении $(\arccos \eta, 2\pi d\eta)$. Очевидно, что имеет место соотношение

$$\varphi(x_1, x_2, \eta) = \lambda(x_1 - x_2) + \int_0^1 \rho(x_1, \zeta, x_2, \eta) d\zeta. \quad (5)$$

Из принципа обратимости оптических явлений следует следующее свойство симметрии для функции диффузного отражения (его можно доказать вполне строго, исходя из симметрии элементарного акта рассеяния $r(x_1, x_2) = r(x_2, x_1)$)

$$\varphi(x_1, \zeta_1, x_2, \eta) = \eta \rho(x_2, \eta, x_1, \zeta_1). \quad (6)$$

Пользуясь формулами (4—6) нетрудно получить выражение

$$\rho(x_1, z, x_2, \eta) = \frac{\lambda}{2\zeta} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x', x_1, z) r(x', x'') \varphi(x'', x_2, \eta) dx' dx''}{\frac{\alpha(x_1)}{\zeta} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta}}, \quad (7)$$

а для определения $\varphi(x_1, x_2, \eta)$ находим функциональное уравнение:

$$\varphi(x_1, x_2, \eta) = \delta(x_1 - x_2) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x'', x_2, \eta) dx'' \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' \int_0^1 \frac{\varphi(x', x_1, z) dz}{\frac{\alpha(x_1)}{\zeta} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta}} \quad (8)$$

Соотношения (7—8) являются искомыми. По своей структуре они подобны (1—2). Для задач же диффузного отражения и диффузного пропускания излучения слоем конечной оптической толщины, аналогично случаю монохроматического рассеяния (*), можно получить три пары выражений для функций отражения $\rho(x_1, z, x_2, \eta, \tau_0)$ и диффузного пропускания $\alpha(x_1, z, x_2, \eta, \tau_0)$ и три системы уравнений для определения вспомогательных функций φ и ψ . Приведем их без доказательства:

$$\rho(x_1, z, x_2, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{2\zeta} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') [\varphi(x', x_1, z, \tau_0) \varphi(x'', x_2, \eta, \tau_0) - \psi(x', x_1, z, \tau_0) \psi(x'', x_2, \eta, \tau_0)] dx' dx''}{\frac{\alpha(x_1)}{\zeta} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta}}$$

$$\alpha(x_1, z, x_2, \eta, \tau_0) = \lambda/2\zeta \times \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') [\varphi(x', x_1, z, \tau_0) \psi(x'', x_2, \eta, \tau_0) - \psi(x', x_1, z, \tau_0) \varphi(x'', x_2, \eta, \tau_0)] dx' dx''}{\frac{\alpha(x_1)}{\zeta} - \frac{\alpha(x_2)}{\eta}}$$

$$\varphi(x_1, x_2, \eta, \tau_0) = \delta(x_1 - x_2) + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') [\varphi(x', x_1, z, \tau_0) \varphi(x'', x_2, \eta, \tau_0) - \psi(x', x_1, z, \tau_0) \psi(x'', x_2, \eta, \tau_0)] dx' dx'' dz}{\frac{\alpha(x_1)}{\zeta} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta}}$$

$$\psi(x_1, x_2, \eta, \tau_0) = \delta(x_1 - x_2) \exp \left| -\frac{\alpha(x_2)}{\eta} \tau_0 \right| +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') [\varphi(x', x_1, z, \tau_0) \psi(x'', x_2, \eta, \tau_0) - \psi(x', x_1, z, \tau_0) \varphi(x'', x_2, \eta, \tau_0)] dx' dx'' dz}{\frac{\alpha(x_1)}{\zeta} - \frac{\alpha(x_2)}{\eta}}$$

$$\rho(x_1, \bar{\tau}, x_2, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' dx'' \int_0^{\tau_0} \psi(x', x_1, \bar{\tau}, \tau) \psi(x'', x_2, \eta, \tau) d\tau$$

$$\rho(x_1, \bar{\tau}, x_2, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' dx'' \int_0^{\tau_0} \exp\left[-(\tau_0 - \tau) \frac{\alpha(x_1)}{\tau}\right] \times \\ \times \varphi(x', x_1, \bar{\tau}, \tau) \psi(x'', x_2, \eta, \tau) d\tau,$$

$$\varphi(x_1, x_2, \eta, \tau_0) = \delta(x_1 - x_2) +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' dx'' \int_0^{\tau_0} \psi(x'', x_2, \eta, \tau) d\tau \int_0^1 \psi(x', x_1, \bar{\tau}, \tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

$$\psi(x_1, x_2, \eta, \tau_0) = \delta(x_1 - x_2) \exp\left[-\frac{\alpha(x_2)}{\eta} \tau_0\right] +$$

$$+ \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' dx'' \int_0^{\tau_0} \psi(x'', x_2, \eta, \tau) d\tau \int_0^1 \exp\left[-(\tau_0 - \tau) \frac{\alpha(x_1)}{\tau}\right] \varphi(x', x_1, \bar{\tau}, \tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

$$\rho(x_1, \bar{\tau}, x_2, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' dx''$$

$$\int_0^{\tau_0} \exp\left\{- (\tau_0 - \tau) \left[\frac{\alpha(x_1)}{\tau} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta} \right]\right\} \varphi(x', x_1, \bar{\tau}, \tau) \varphi(x'', x_2, \eta, \tau) d\tau$$

$$\rho(x_1, \bar{\tau}, x_2, \eta, \tau_0) = \frac{\lambda}{2\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' dx''$$

$$\int_0^{\tau_0} \exp\left[-\frac{\alpha(x_2)}{\eta} (\tau_0 - \tau)\right] \psi(x', x_1, \bar{\tau}, \tau) \varphi(x'', x_2, \eta, \tau) d\tau,$$

$$\varphi(x_1, x_2, \eta, \tau_0) = \delta(x_1 - x_2) + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' dx''$$

$$\int_0^{\tau_0} \varphi(x'', x_2, \eta, \tau) d\tau \int_0^1 \exp\left\{- (\tau_0 - \tau) \left[\frac{\alpha(x_1)}{\tau} + \frac{\alpha(x_2)}{\eta} \right]\right\} \varphi(x', x_1, \bar{\tau}, \tau) \frac{d\tau}{\tau}$$

$$\psi(x_1, x_2, \tau_1, \tau_0) = \delta(x_1 - x_2) \exp \left| -\frac{\alpha(x_2)}{\tau_1} \tau_0 \right| + \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} r(x', x'') dx' dx''$$

$$\int_0^{\tau_0} \exp \left| -(\tau_0 - \tau) \frac{\alpha(x_2)}{\tau_1} \right| \varphi(x'', x_2, \tau_1, \tau) d\tau \int_0^1 \psi(x', x_1, \tau_1, \tau) \frac{d\tau_1}{\tau_1}.$$

Соотношения I и II в случае монохроматического рассеяния $r(x, x') = \alpha(x)\delta(x - x')$ впервые были получены В. А. Амбарцумяном (2^а), а III — В. В. Соболевым (6). Затем В. В. Ивановым были обобщены на случай полностью некогерентного рассеяния $r(x, x') = A\alpha(x)\alpha(x')$. Очевидно, что из приведенных выше формул легко могут быть получены указанные частные случаи, а если перейти в них к разложению (3), можно получить соответственно результаты работы (4).

В связи с последним следует отметить, что рассмотренный нами подход к задаче приобретает особую практическую важность в тех случаях, когда построение разложения (3) затруднительно, т. е. когда собственные функции $\alpha_k(x)$ ядра $r(x, x')$ заранее не известны и приходится ограничиваться приближенным построением этих функций, что сопряжено с большими трудностями с вычислительной точки зрения.

Бюраканская астрофизическая обсерватория
Академии наук Армянской ССР

Հ. Վ. ՊԻՆՉՅԱՆ

Դիֆուզ անդրադարձման խնդիրն րստ հանախականությունների ճառագայթման վերաբաշխման կամայական օրենքի դեպքում

Կիսանվերջ հարթ դուրաճեռ միջավայրից ճառագայթների դուրաճեռ փնջի դիֆուզ անդրադարձմանը վերաբերվող հայտնի առնչությունների, որոնք ստացված էին Վ. Հ. Համբարձումյանի կողմից մոնոխրոմատիկ ցրման դեպքում, բնութանրացվում են ոչ կոճերկնա ցրման դեպքի համար, րստ համախառնության ճառագայթման վերաբաշխման կամայական ֆունկցիայի դեպքում: Ըստ որում շի օգտագործվում վերաբաշխման ֆունկցիայի որևէ ձևի տրոհում կամ հատուկ ներկայացում: Դա հնարավոր է դառնում իրագործել իդուտրոպ ճառագայթված քվանտի համար միջավայրից դուրս գալու հավա-

նականության գաղափար մտցնելու և օպտիկական երևույթների շրջելիության սկզբունքն օգտագործելու շնորհիվ: Բերվում են նաև առնչություններ, որոնք լուծում են վերջավոր օպտիկական հաստություն ունեցող միջավայրից ճառագայթների զուգահեռ փնջի դիֆուզ անդրադարձման և դիֆուզ անցման խրնդիրը:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИТИЦЕНТРАՐԻՆ

¹ В. А. Амбарцумян, *Астрономический журнал*, т. 19, № 5, 30 (1942). ² В. А. Амбарцумян, *ДАН*, т. 38, № 8, 257 (1943). ³ В. В. Соболев, *Астрономический журнал*, т. 26, № 3, 129 (1949). ⁴ Н. Б. Енгибарян, А. Г. Никогосян, *Астрофизика*, т. 8, 213 (1972). ⁵ А. Г. Никогосян, Г. А. Арутюнян, *ДАН*, т. 229, № 3, 583 (1976). ⁶ В. В. Соболев, *Астрономический журнал*, т. 34, № 3, 336 (1957). ⁷ В. В. Иванов, *Астрономический журнал*, т. 40, № 2, 257 (1963).