ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 3

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. А. Баблоян, А. П. Мелконян

Осесимметричная задача для вращающегося цилиндра, ослабленного периодическими цилиндрическими трещинами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 18/I 1978)

Осесимметричные контактные задачи для бесконечного цилиндра рассматривались в работах П. З. Лифшица (1), В. М. Александрова (2), Г. Я. Попова (3) и др.

Осесимметричная задача для бесконечного цилиндра, ослабленного одной центральной монетообразной или кольцеобразной трещиной, была рассмотрена в работах (4,5).

Аналогичные задачи для конечного цилиндра, когда граничные условия как на цилиндрической поверхности, так и на торцах задаются в смешанном виде, рассматривались в работах (6,7).

Осесимметричная задача для вращающегося цилиндра конечной длины подробно изучалась в работе В. Т. Гринченко (8).

В настоящей работе приводится решение осесимметричной задачи для вращающегося бесконечного цилиндра радиуса R, ослабленного периодическими (с периодом 2π) цилиндрическими трещинами радиуса $s<R$ и длины $l=2(\pi-c)$ (рис. 1). Предполагается, что при вращении цилиндра могут возникнуть кольцеобразные трещины по отрезкам $s<r<R$ $z=(2n-1)\pi$, $n=0, \pm 1, \pm 2\ldots$ При наличии таких трещин одно из граничных условий на их поверхности удовлетворяется приближенно.

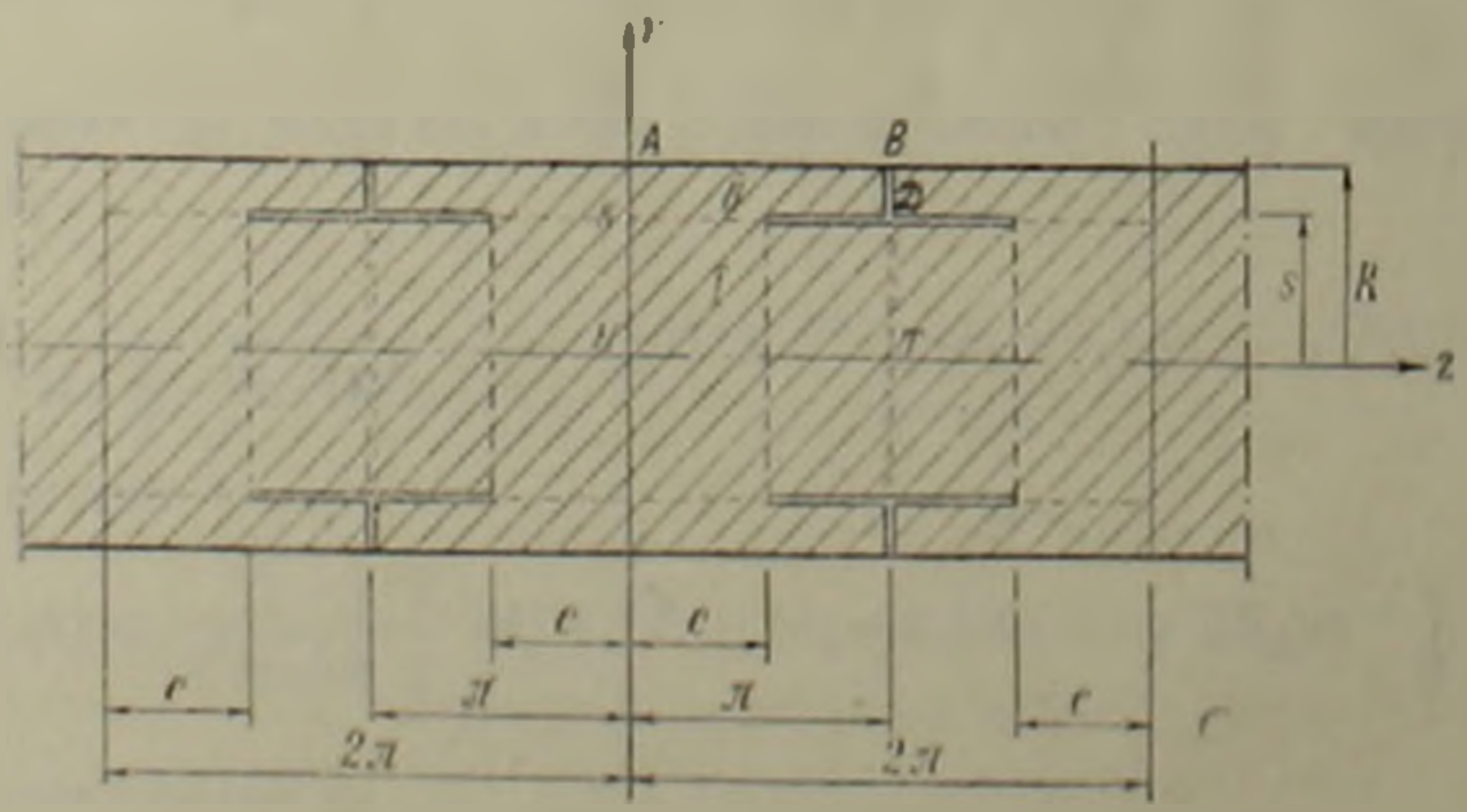

Рис. 1

Решение задачи ищется в виде рядов Фурье, коэффициенты которых определяются из двух бесконечных систем алгебраических уравнений. Доказывается, что эти уравнения в общем случае квазивполне регулярны, а свободные члены при возрастании номера стремятся к нулю. Получены формулы для контактных напряжений σ_r, τ_{rz} и раствора цилиндрической трещины.

Известно ([8]), что решение осесимметричной задачи для вращающегося тела сводится к определению функции напряжений $\chi(r, z)$, которая в области осевого сечения тела удовлетворяет уравнению

$$\nabla^4\chi(r, z) = -2\frac{3-2\nu}{1-\nu}\rho\omega^2 z, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1}$$

а на поверхности задается законом распределений напряжений и перемещений

$$\begin{gathered}
\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}\right] - \frac{3-2\nu}{2}\rho\omega^2 r^2,\\
\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\nabla^2\chi - \frac{1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}\right] - \frac{1-2\nu}{2}\rho\omega^2 r^2,\\
\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right] + (3-\nu)\rho\omega^2 r^2,\\
\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2}\right] + (3-2\nu)\rho\omega^2 rz,\\
2Gu = -\frac{\partial^2\chi}{\partial r\partial z} - \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^3,\\
2Gw = 2(1-\nu)\nabla^2\chi - \frac{\partial^2\chi}{\partial z^2} + (3-2\nu)\rho\omega^2 r^2 z,
\end{gathered} \tag{2}$$

где G—модуль сдвига, ν—коэффициент Пуассона, ω—угловая скорость.

В силу симметрии задачу будем решать только для области $0<r<R$, $0<z<\pi$, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$\begin{gathered}
w(r, 0) = 0, \quad \tau_{rz}(r, 0) = \tau_{rz}(r, \pi) = 0 \qquad (0<r\leqslant R)\\
w(r, \pi) = a_1 \qquad (0\leqslant r\leqslant s)
\end{gathered} \tag{3}$$

Функцию напряжений в каждой подобласти I (KDTH) и II (ABDK) ищем отдельно, удовлетворяя при этом на линии контакта двух подобластей $r=s$, $0\leqslant z<c$ условиям сопряжения

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)}, \quad \tau_{rz}^{(1)} = \tau_{rz}^{(2)}, \quad u_1 = u_2, \quad w_1 = w_2. \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем индексом $i=1$ и $i=2$ обозначены компоненты напряжений и перемещений в нижней и верхней подобластях соответственно.

Решение уравнения (1) представим в виде (9.10)

$$\chi_i(r,z)=z\,(A_i r^3+B_i z^2+C_i z+D_i \ln r)+\varphi_i(r,z)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^i(r)\sin k\,z, \tag{5}$$

где

$$\varphi_k^{(i)}(r)=E_k^{(i)}I_0(kr)+G_k^{(i)}krI_1(k,r)+F_k^{(i)}K_0(kr)+H_k^{(i)}kr\,K_1(k,r),$$

$$\varphi_i(r,z)=-0{,}5\,\varepsilon_i(\alpha_i r^4 z+\beta_i r^2 z^3+\gamma_i z^5).$$

$$\varepsilon_i=\frac{(3-2\nu)\rho\omega^2}{2(1-\nu)(8\alpha_i+6\beta_i+15\gamma_i)},\quad F_k^{(1)}=H_k^{(1)}=D_1=0, \tag{6}$$

а $I_n(x)$, $K_n(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента, соответственно первого и второго рода.

Рассмотрим напряженное состояние цилиндра при следующих граничных условиях

$$\sigma_r^{(2)}(R,z)=\tau_{rz}^{(2)}(R,z)=0 \qquad (0\leqslant z\leqslant\pi)$$

$$\sigma_r^{(i)}(s,z)=\tau_{rz}^{(i)}(s,z)=0, \qquad (c<z\leqslant\pi \quad i=1;\ 2) \tag{7}$$

$$\tau_{rz}^{(2)}(r,\pi)=0 \qquad 2Gw_2(r,\pi)=a_2+br^2 \quad (s\leqslant r\leqslant R)$$

Постоянные a_1, a_2, b будем определять из условий равновесия статики для рассматриваемого участка цилиндра

$$\int_s^R r^k\sigma_z^{(2)}(r,\pi)dr=0 \qquad (k=1,\ 2)$$

$$2\pi\int_0^s r\sigma_z^{(1)}(r,\pi)\,dr=2\pi\int_0^R r\sigma_z\,(r,0)dr=P. \tag{8}$$

Удовлетворяя условиям (3), (4), (7) получим ряд соотношений, откуда для определения коэффициентов разложений (5), (6) будем иметь (аргумент α при бесселевых функциях будем опускать)

$$k^2\Delta_1(\alpha)G_k^{(1)}=X_k(I_0-\alpha^{-1}I_1)-Y_kI_1,$$

$$k^2\Delta_1(\alpha)E_k^{(1)}=-X_k[(1-2\nu)I_0+\alpha I_1]+Y_k[2(1-\nu)I_1+\alpha I_0],$$

$$k^2\Delta G_k^{(2)}=-\alpha X_kB_{3k}+\alpha Y_kB_{4k}-B_kB_{5k},$$

$$k^2\Delta H_k^{(2)}=-\alpha X_kB_{1k}+\alpha Y_kB_{2k}-B_kB_{6k}, \tag{9}$$

$$E_k^{(2)}+G^{(2)}[2(1-\nu)+\alpha\delta(\alpha)]-H_k^{(2)}\alpha\Delta_2(\alpha)=$$

$$=k^{-2}\{X_k[\alpha K_0+K_1]+(Y_k-B_k)\alpha K_1\},$$

$$-F_k^{(2)}+H_k^{(2)}[2(1-\nu)-\alpha\delta(\alpha)]+G_k^{(2)}\alpha\Delta_1(\alpha)=$$

$$=k^{-2}\{X_k[\alpha I_0-I_1]-(Y_k-B_k)\alpha I_1\},$$

$$4(1-\nu)A_i + 3(1-2\nu)B_i = \frac{a_i}{2\pi} - \frac{\nu\pi^2 b_i}{3(1-\nu)}, \quad C_i = 0 \quad (i=1;\ 2)$$

$$2A_2 + 3B_2 = \frac{a_2}{2\pi} + \frac{\pi^2 b_2}{3(1-\nu)} + R^2 \left[\frac{3-2\nu}{8(1-\nu)} \rho\omega^2 - \frac{\nu b_2}{4(1-\nu)} \right] - \frac{D_2}{R^2},$$

$$2(1-2\nu)(A_1 - A_2) - 6\nu(B_1 - B_2) + \frac{D_2}{s^2} = b_2 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\pi^2}{3} - \frac{\nu s^2}{4(1-\nu)} \right). \tag{10}$$

$$15\gamma_i\varepsilon_i = \frac{2-\nu}{1-\nu} b_i, \quad 3\beta_i\varepsilon_i = -b_i, \quad b_i = \frac{b}{2\pi} [1 + (-1)^i]$$

$$16(1-\nu)\alpha_i\varepsilon_i = (3-2\nu)\rho\omega^2 - 2\nu b_i, \quad \alpha = ks, \quad \beta = kR. \tag{11}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\alpha B_{1k} = A_{0k}(\alpha I_0 - I_1) - A_{1k}(\alpha K_0 + K_1), \quad B_{2k} = A_{0k} I_1 + A_{1k} K_1,$$

$$\alpha B_{3k} = A_{2k}(\alpha I_0 - I_1) - A_{0k}(\alpha K_0 + K_1), \quad B_{4k} = A_{2k} I_1 + A_{0k} K_1$$

$$B_{5k} = A_{2k}[\alpha I_1(\alpha) - \beta I_1(\beta)] + A_{0k}[\alpha K_1(\alpha) - \beta K_1(\beta)],$$

$$B_{6k} = A_{0k}[\alpha I_1(\alpha) - \beta I_1(\beta)] + A_{1k}[\alpha K_1(\alpha) - \beta K_1(\beta)],$$

$$A_{1k} = \alpha\Delta_1(\alpha) - \beta\Delta_1(\beta), \quad A_{2k} = \alpha\Delta_2(\alpha) - \beta\Delta_2(\beta),$$

$$A_{0k} = \alpha\delta(\alpha) - \beta\delta(\beta), \quad \Delta = A_{0k}^2 - A_{1k} \cdot A_{2k}, \tag{12}$$

$$\Delta_1(x) = x[I_0^2(x) - I_1^2(x)] - \frac{2(1-\nu)}{x} I_1^2(x), \quad B_k = \frac{4(-1)^k(1+\nu)b_2}{(1-\nu)k^3},$$

$$\Delta_2(x) = x[K_0^2(x) - K_1^2(x)] - \frac{2(1-\nu)}{x} K_1^2(x),$$

$$\delta(x) = x[I_0(x)K_0(x) + I_1(x)K_1(x)] + \frac{2(1-\nu)}{x} I_1(x)K_1(x).$$

Отметим, что последние два уравнения (9) остаются в силе, если заменить α через β и положить в них $X_k = Y_k = 0$.

Удовлетворяя смешанным условиям (4) и (7) на линии $r = s$, $0 \leq z \leq \pi$ для определения неизвестных коэффициентов X_k и Y_k, входящих в (9), получим две системы парных тригонометрических уравнений, которые, с использованием результатов [11–13], сводятся к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений

$$X_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{kn} M_k + \gamma_{n1}, \quad Y_n = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{kn} N_k + \gamma_{n2} \quad (n = 1, 2 \ldots) \tag{13}$$

При этом из условия непрерывности радиального перемещения $u(s, z)$ получается также следующее соотношение:

$$\frac{s}{4(1-\nu)} \left[2(A_1 - A_2) - \frac{D_2}{s^2} - \frac{\nu b_2 s^2}{4(1-\nu)} \right] - \frac{b_2 s}{2(1-\nu)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} [2 - y_k(\cos c)] = \tag{14}$$

$$= 2\ln\left(\sin\frac{c}{2}\right)\left[2(1-2\nu)A_1 - 6\nu B_1 + \frac{(3-2\nu)\rho\omega^2 s^2}{8(1-\nu)}\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} N_k y_k(\cos c).$$

В системе (13) введены обозначения

$$N_k = X_k N_{1k} + Y_k N_{2k} + B_k N_{3k}, \quad M_k = X_k M_{1k} + Y_k M_{2k} + B_k M_{3k},$$

$$N_{1k} = \frac{\alpha}{2\Delta}(B_{3k} I_1 + B_{1k} K_1) + \frac{I_1}{2\Delta_1(\alpha)}\left(I_0 - \frac{I_1}{\alpha}\right),$$

$$N_{2k} = 1 - \frac{\alpha}{2\Delta}(B_{1k} I_1 + B_{2k} K_1) - \frac{I_1^2}{2\Delta_1(\alpha)}, \quad N_{3k} = \frac{1}{2\Delta}(B_{5k} I_1 + B_{6k} K_1),$$

$$M_{1k} = 1 + \frac{1}{2\Delta}\left[B_{1k}(\alpha K_0 + K_1) - B_{3k}(\alpha I_0 - I_1)\right] - \frac{(\alpha I_0 - I_1)^2}{2\alpha^2 \Delta_1(\alpha)},$$

$$M_{2k} = \frac{1}{2\Delta}\left[B_{1k}(\alpha I_0 - I_1) - B_{2k}(\alpha K_0 + K_1)\right] + \frac{I_1(\alpha I_0 - I_1)}{2\alpha\Delta_1(\alpha)},$$

$$M_{3k} = \frac{\alpha^{-1}}{2\Delta}\left[B_{6k}(\alpha K_0 + K_1) - B_{5k}(\alpha I_0 - I_1)\right] - [4(1+\nu)]^{-1} \tag{15}$$

$$\gamma_{n1} = \left(b_2 s^2 - \frac{a_1 - a_2}{\pi}\right)\frac{z_n(\cos c)}{4(1-\nu)n}, \quad \alpha_{kn} = \frac{k}{2}\int_0^c y_n(\cos\theta) y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta,$$

$$\gamma_{n2} = \left[2(1-2\nu)A_1 - 6\nu B_1 + \frac{(3-2\nu)\rho\omega^2 s^2}{8(1-\nu)}\right]\frac{Y_n(\cos c)}{n} -$$

$$- \frac{s b_2}{2(1-\nu)n^2}\left[2n y_n(\cos c)\ln\cos\frac{c}{2} + z_n(\cos c)\right],$$

$$\beta_{kn} = -\frac{1}{2} z_n(\cos c) y_k(\cos c) + \frac{n}{k}\alpha_{kn}.$$

Виды и свойства функций $y_n(x)$, $z_n(x)$, а также интегралов (15) приведены в работе ([13]).

Аналогичным образом, как это сделано в ([12]), доказывается, что бесконечная система (13) квази-вполне регулярна, а свободные члены системы имеют порядок $O(n^{-3/2})$.

После решения бесконечных систем контактные напряжения будут вычислены по формулам

$$\sigma_r(s, z) = \frac{Q_1 \cos z/2}{\sqrt{2(\cos z - \cos c)}} + \frac{s b_2}{2(1-\nu)}\ln\frac{\sqrt{1+\cos z} + \sqrt{\cos z - \cos c}}{\sqrt{1+\cos z} - \sqrt{\cos z - \cos c}} -$$

$$- \cos\frac{z}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 N_k \int_z^c \frac{y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{2(\cos z - \cos\theta)}}, \quad (0 < z < c) \tag{16}$$

$$\tau_{rz}(s, z) = \frac{Q_2 \sin z/2}{\sqrt{2(\cos z - \cos c)}} + \sin\frac{z}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 M_k \int_z^c \frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{2(\cos z - \cos\theta)}},$$

где коэффициенты при особенностях имеют вид:

$$Q_1=\sum_{k=1}^{\infty} kN_k z_k(\cos c)+\frac{2sb_2}{1-\nu}\ln\cos\frac{c}{2}-\sqrt{2}\pi\left[(1-2\nu)A_1-3\nu B_1+\right.$$

$$\left.+\frac{3-2\nu}{16(1-\nu)}\right]\rho\omega^2 s^2, \tag{17}$$

$$Q_2=\sum_{k=1}^{\infty} kM_k y_k(\cos c)+\frac{1}{2(1-\nu)}\left(b_2 s^2-\frac{a_1-a_2}{\pi}\right).$$

Для раствора трещины получается следующее выражение:

$$\frac{G}{4(1-\nu)}\left[u_2(s,z)-u_1(s,z)\right]=\sin\frac{z}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty} kN_k\int_c^z\frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}\,\theta/2\,d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos z)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{2sb_2}{1-\nu}\int_c^z\frac{\mathrm{ctg}\,\theta/2\cdot\ln\cos\theta/2\cdot d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos z)}}\right]-\left[2(1-2\nu)A_1-6\nu B_1+\frac{3-2\nu}{8(1-\nu)}\rho\omega^2 s^2\right]\times$$

$$\times\ln\frac{\sqrt{1-\cos z}+\sqrt{\cos c-\cos z}}{\sqrt{1-\cos z}-\sqrt{\cos c-\cos z}}\qquad(c<z\leqslant\pi).$$

Постоянные A_i, B_i, D_2 будем определять из уравнений (10) и (14), а для определения неизвестных a_1, a_2 и b_2 из (8) получаем следующие соотношения:

$$2(2-\nu)A_1+3(1-\nu)B_1+\frac{1}{s}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k X_k=\frac{\nu\rho\omega^2 s^2}{8(1-\nu)}+\frac{P}{2\pi} \tag{19}$$

$$2(2-\nu)A_2+3(1-\nu)B_2-\frac{R^2+s^2}{8(1-\nu)}(\nu\rho\omega^2-2b_2)=\frac{s}{R^2-s^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k X_k,$$

$$\int_s^R r^2\sigma_z^{(2)}(r,\pi)\,dr=0.$$

В частном случае, когда кольцевая трещина отсутствует, имеем $b_2=0$, $a_1=a_2=a$, причем значение a определяется из соотношения:

$$\frac{(1+3\nu)a}{2\pi}-\frac{2\nu D_2}{R^2}+\frac{\nu}{4}\rho\omega^2 R^2=\frac{P}{2\pi R}. \tag{20}$$

При этом в формулах (12)–(19) нужно принимать:

$$B_k=\gamma_{k1}=0,\qquad \gamma_{k2}=\frac{\delta}{k}y_k(\cos c), \tag{21}$$

где

$$\delta=2(1-2\nu)A_1-6\nu B_1+\frac{(3-2\nu)\rho\omega^2 s^2}{8(1-\nu)}=$$

$$=-(R^2-s^2)\left[\frac{D_2}{s^2R^2}+\frac{(3-2\nu)\rho\omega^2}{8(1-\nu)}\right]. \qquad (22)$$

Отметим, что в этом случае все неизвестные бесконечных систем (13) пропорциональны величине δ. Это значительно облегчает как численное решение бесконечных систем, так и вычисление величин (16)—(19).

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

Պարբերական գլանային ճեղքերով թուլացված պտտվող գլանի առանցքասիմետրիկ խնդիրը

Աշխատանքը նվիրված է պարբերական ճեղքերով թուլացված պտտվող հոծ գլանի առանցքասիմետրիկ խնդրի լուծմանը։ Ենթադրվում է, որ պտտման ընթացքում գլանի վրա կարող են առաջանալ նաև օղակաձև ճեղքեր։

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրյեի մեթոդով և բերվում է գծային, հանրահաշվական անվերջ սիստեմի լուծմանը։

Ապացուցվում է, որ ստացված սիստեմը քվազի-լիովին ռեգուլյար է։

Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային լարումների և ճեղքի բացվածքի համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *П. З. Лифшиц*, «Известия АН СССР», ОТН, № 4, 1955. [2] *В. М. Александров*, «Известия АН СССР», ОТН, № 5, 1962. [3] *Г. Я. Попов*, «Известия АН Арм. ССР», серия ф.-м. наук, т. 17, № 4 (1964). [4] *N. Sneddon, R. Y. Tuit*, Int. J. Eng. sci., vol. 1, pp. 391—409, 1963. [5] *Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон*, ПММ, т. 37, вып. 2 (1973). [6] *А. П. Мелконян*, „Известия АН Арм. ССР", Механика, т. 24, № 2 (1971). [7] *А. А. Баблоян, А. П. Мелконян*, „Известия АН Арм. ССР", Механика, т. 26, № 5 (1973). [8] *В. Т. Гринченко*, Труды Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Ереван, 1964. [9] *B. Tanimoto*, J. Shinshu Univ. (Engl. Ed.), № 3, 11—28, 1953. [10] *Б. Л. Абрамян*, ДАН Арм. ССР, т. 19, № 1 (1954). [11] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Наука, М., 1963. [12] *А. А. Баблоян, А. П. Мелконян*, „Известия АН Арм. ССР", Механика, т. 21, № 1 (1968). [13] *А. А. Баблоян*, ПММ, т. 31, вып. 4 (1967).