

УДК 536.24

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Р. С. Минасян

О смешанной граничной задаче теплопроводности
 для шара

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 2/VI 1978)

В работах (1-4) получены решения смешанных краевых задач теплопроводности для бесконечного цилиндра и полуплоскости. В настоящей работе приводится решение задачи стационарного осесимметричного течения тепла в шаре, на поверхности которого происходит теплообмен с окружающей средой, когда коэффициент теплообмена является функцией угла θ . Предполагаем, что внутри шара имеются источники тепла. Функция распределения температуры в шаре удовлетворяет уравнению (5)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = - \frac{1}{\lambda} w(r, \theta) \quad (1)$$

и граничному условию

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = h(\theta) [S(\theta) - U(R, \theta)]. \quad (2)$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности шара, $w(r, \theta)$ — интенсивность тепловыделения внутри шара, $h(\theta)$ и $S(\theta)$ — соответственно коэффициент теплообмена и температура окружающей среды. Относительно функций $h(\theta)$, $S(\theta)$ и $w(r, \theta)$ предполагаем, что они имеют ограниченную вариацию и что коэффициент теплообмена $h(\theta)$ неотрицателен. Преобразованием (5)

$$\cos \theta = \zeta, \quad U(r, \theta) = r^{-\frac{1}{2}} U^*(r, \zeta) \quad (3)$$

задача сводится к решению дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[(1-\zeta^2) \frac{\partial^2 U^*}{\partial \zeta^2} - 2\zeta \frac{\partial U^*}{\partial \zeta} - \frac{1}{4} U^* \right] = - \frac{1}{\lambda} r^{\frac{1}{2}} w^*(r, \zeta) \quad (4)$$

с граничным условием

$$\left. \frac{\partial U^*}{\partial r} \right|_{r=R} - \frac{1}{2R} U^*(R, \zeta) = h^*(\zeta) [R^{\frac{1}{2}} S^*(\zeta) - U^*(R, \zeta)]. \quad (5)$$

Разложим функцию $U^*(r, \zeta)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$U^*(r, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(r) P_k(\zeta), \quad (6)$$

где $P_k(\zeta)$ — полиномы Лежандра, удовлетворяющие уравнению (*)

$$(1-\zeta^2)P_k'(\zeta) - 2\zeta P_k'(\zeta) + k(k+1)P_k(\zeta) = 0, \quad (7)$$

$$U_k(r) = \frac{1}{D_k} \int_{-1}^1 U^*(r, \zeta) P_k(\zeta) d\zeta, \quad D_k = \frac{2}{2k+1}.$$

Умножая уравнение (4) на

$\frac{1}{D_k} P_k(\zeta) d\zeta$, интегрируя по ζ от -1 до $+1$, и учитывая (7), для определения $U_k(r)$ получаем уравнение

$$U_k'(r) + \frac{1}{r} U_k(r) - \frac{1}{r^2} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 U_k(r) = -\frac{1}{r} w_k(r), \quad (8)$$

ограниченное решение которого имеет вид:

$$U_k(r) = \left(\frac{r}{R} \right)^{k+\frac{1}{2}} \left[C_k + \frac{1}{\lambda(2k+1)} \int_r^R w_k(r_1) G_k(r_1) r_1 dr_1 \right] + \\ + \frac{G_k(r)}{\lambda(2k+1)} R^{-k-\frac{1}{2}} \int_0^r w_k(r_1) r_1^{k+\frac{3}{2}} dr_1. \quad (9)$$

Здесь

$$w_k(r) = \frac{1}{D_k} r^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 w^*(r, \zeta) P_k(\zeta) d\zeta; \quad G_k(r) = \left(\frac{R}{r} \right)^{k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{r}{R} \right)^{k+\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Прежде, чем перейти к определению постоянных C_k , входящих в выражение (9), изменим граничное условие (5):

$$\left. \frac{\partial U^*}{\partial r} \right|_{r=R} + \left(h^* - \frac{1}{2R} \right) U^*(R, \zeta) = R^{\frac{1}{2}} h(\zeta) S^*(\zeta) - [h(\zeta) - h^*] U^*(R, \zeta), \quad (11)$$

где $h^* = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 h(\zeta) d\zeta$. Учитывая (6) и обозначая $C_k = \frac{m_k}{k}$ ($k \geq 1$); $C_0 =$

$= m_0$, из (11) имеем:

$$m_k = -\frac{kR}{(k+h^*R)D_k} \left[m_0 \int_{-1}^1 (h^*(\zeta) - h^*) P_k(\zeta) d\zeta + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{j} \int_{-1}^1 (h^*(\zeta) -$$

$$-h^*(\zeta)P_k(\zeta)P_j(\zeta)d\zeta \Big| + q_k, \quad (12)$$

$$m_0 = -\frac{1}{2h^*} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m_j}{j} \int_{-1}^1 [h^*(\zeta) - h^*] P_j(\zeta) d\zeta + q_0.$$

Здесь

$$q_k = \frac{k}{k+h^*R} \left[\frac{1}{D_k} R^{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 h^*(\zeta) S^*(\zeta) P_k(\zeta) d\zeta + \frac{1}{k} R^{-k-\frac{1}{2}} \int_0^R w_k(r) r^{k+\frac{3}{2}} dr \right];$$

$$q_0 = \frac{1}{2h^*} \left[R^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 h^*(\zeta) S^*(\zeta) d\zeta + \frac{2}{k} R^{-\frac{3}{2}} \int_0^R w_0(r) r^{\frac{3}{2}} dr \right]. \quad (13)$$

Таким образом, для определения m_k получили бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (12). Для исследования полученной системы оценим вначале сумму модулей коэффициентов при неизвестных в каждом из уравнений. Учитывая предположенную выше ограниченность вариации коэффициента теплообмена $h^*(\zeta)$ и воспользовавшись оценками модуля полиномов Лежандра $P_k(\xi)$ и их производной, данными в работе (7)

$$(1-\zeta^2)^{1/4} |P_k(\zeta)| < \sqrt{\frac{1}{n\pi}}; \quad (1-\zeta^2)^{3/4} |P'_k(\zeta)| < \left(k + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{6}{k\pi}}, \quad (14)$$

где $n = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$, после некоторых упрощений будем иметь

$$z_k = \frac{kR}{(k+h^*R)D_k} \left\{ \left| \int_{-1}^1 [h^*(\zeta) - h^*] P_k(\zeta) d\zeta \right| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left| \int_{-1}^1 [h^*(\zeta) - h^*] P_j(\zeta) P_k(\zeta) d\zeta \right| \right\} < \frac{14\sqrt{k}RH}{k+h^*R} < \frac{14RH}{\sqrt{k}}. \quad (15)$$

Здесь через H обозначена полная вариация функции $h^*(\zeta) - h^*$ в промежутке $(-1: 1)$. Из (15) усматриваем, что, начиная, от $k = k_1 \geq K^2$, где $K = 14HR$, суммы модулей коэффициентов в уравнениях (12) становятся меньше единицы и при возрастании k стремятся к нулю с быстротой $\frac{K}{\sqrt{k}}$. Свободные члены q_k , согласно предположению об ограниченности вариации функций $S(\theta)$, $h(\theta)$, $w(r, \theta)$ и неравенствам (14), будучи ограниченными в своей совокупности, с возрастанием k также стремятся к нулю с быстротой $O(k^{-\frac{1}{2}})$. Согласно теории бесконечных систем (8), имеют место ограниченность решения и сходимость метода последовательных приближений. Задаваясь

значениями $S(\theta)$, $h(\theta)$, $w(r, \theta)$ и решая усеченную систему (12), найдем оценки величины m_k сверху и снизу, после чего способом, описанным в (°), получим из (6) и (9) значения $U(r, \theta)$ с избытком и недостатком. Оценим далее по модулю n -ый остаток ряда (6). Предполагая суммируемость первой производной $w(r, \theta)$ по r и θ , будем иметь внутри шара ($r < R$)

$$\varepsilon_n(r, \theta) = \left| \sum_{k=n}^{\infty} U_k(r) P_k(\cos \theta) \right| < \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \left[\frac{M}{\ln R - \ln r} \left(\frac{r}{R} \right)^n n^{-3/2} + \frac{1}{\lambda} w' n^{-2} \right],$$

где $M = \max_{(k, n)} |m_k|$; w — полная вариация $w(r, \theta)$. На поверхности $r = R$

$$\varepsilon_n(\theta) < \frac{2M}{\sqrt{\sin \theta}} n^{-1/2}.$$

Заметим, что при конкретном задании функций $h(\theta)$, $S(\theta)$ и $w(r, \theta)$ можно значительно усилить быстроту убывания коэффициентов, определяемых из бесконечной системы (²), что позволяет существенно уменьшить число операций, необходимых для получения заданной точности решения.

Рассмотрим, например, случай, когда $h^*(\zeta)$ кусочно-постоянен а $S^*(\zeta)$ — кусочно-линейна:

$$h^*(\zeta) = \begin{cases} h_1 & \text{при } -1 < \zeta < 0 \\ h_2 & \text{при } 0 < \zeta < 1 \end{cases}; \quad S^*(\zeta) = \begin{cases} S_0 + S_1 \zeta & \text{при } -1 < \zeta < 0 \\ S_0 + S_2 \zeta & \text{при } 0 < \zeta < 1; \end{cases}$$

$$w^*(r, \zeta) \equiv 0.$$

В этом случае $h^* = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$, и из (12) и (13) имеем:

$$m_k = \frac{k(h_1 - h_2)R}{2(k + h^*R)D_k} \left\{ [1 - (-1)^k] \frac{m_0 P'_k(0)}{k(k+1)} + \sum_{j=1}^{\infty} [1 - (-1)^{k+j}] \times \right.$$

$$\times \left. \frac{[P'_k(0)P_j(0) - P'_j(0)P_k(0)]m_j}{j(k-j)(k+j+1)} \right\} + q_k \quad (k \geq 1)$$

$$m_0 = \frac{h_1 - h_2}{2(h_1 + h_2)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P'_j(0)m_j}{j^2(j+1)} + q_0.$$

Здесь

$$q_k = \frac{kR^{3/2}}{(k + h^*R)D_k} \left[S_0 P'_k(0) \frac{h_2 + (-1)^k h_1}{k(k+1)} - P_k(0) \frac{h_2 S_2 - (-1)^k h_1 S_1}{(k-1)(k+2)} \right];$$

$$(17)$$

$$q_0 = \sqrt{R} \left(S_0 - \frac{h_1 S_1 - h_2 S_2}{2(h_1 + h_2)} \right).$$

а штрих при знаке суммы означает, что при суммировании индекс $j=k$ опускается. Преобразуем неизвестные m_k , обозначив

$$m_k = \frac{(h_1 - h_2) R P'_k(0)}{(k+1)(k+h^* R) D_k} (\eta - S_0 \sqrt{R}) + \frac{m_k^*}{k}; \quad m_0 = m_0^*, \quad (k \geq 1) \quad (18)$$

где постоянная η определяется из выражения

$$\eta = m_0^* + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P_j(0) m_j^*}{j^2}. \quad (19)$$

Подставляя значения m_k из (18) в (16) и замечая, что $(^{\circ}) P_{2k+1}(0) = -P'_{2k}(0) = 0$ приходим к следующим соотношениям для неизвестных m_k^* :

$$\begin{aligned} m_k^* = & - \frac{kR}{(k+h^* R) D_k} \left\{ \frac{h_1 - h_2}{k+1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 (k-j) (k+j+1)} \times \right. \\ & \left. \left| (k(k+1) P_k(0) P'_j(0) - j(j+1) P_j(0) P'_k(0)) m_j^* + \frac{(h_1 - h_2) R}{(j+1)(j+h^* R) D_j} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (\eta - \sqrt{R} S_0) k(k+1) j P_k(0) P'_j(0) \right| - k \sqrt{R} \frac{(h_1 S_1 - h_2 S_2) P_k(0)}{(k-1)(k+2)} \right\}; \quad (20) \\ m_0^* = & \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{P'_j(0)}{j^2 (j+1)} \left| \frac{m_j^*}{j} + (h_1 - h_2) R \frac{(\eta - \sqrt{R} S_0) P'_j(0)}{(j+1)(j+h^* R) D_j} \right| + \\ & + \sqrt{R} \left(S_0 - \frac{h_1 S_1 - h_2 S_2}{2(h_1 + h_2)} \right). \end{aligned}$$

Как легко видеть, сумма модулей коэффициентов при неизвестных в k -м уравнении системы (20) и свободные члены при возрастании k стремятся к нулю с быстротой $O(k^{-1/2} \ln k)$. Учитывая (18), (9), (6), (3), для $U(r, \theta)$ получаем следующее выражение

$$U(r, \theta) = R^{-1/2} m_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{m_k^*}{k^2} + \frac{(h_1 - h_2) R (\eta - \sqrt{R} S_0) P'_k(0)}{k(k+1)(k+h^* R) D_k} \right] P_k(\cos \theta) R^{-k-1/2} r^k \quad (21)$$

Оценивая по модулю n -ый остаток этого ряда, имеем: внутри шара

$$\varepsilon_n(r, \theta) < \frac{1}{(\ln R - \ln Z) \sqrt{\sin \theta}} |M^* n^{-3/2} + (h_1 - h_2) R (\eta - \sqrt{R} S_0) n^{-2}| \left(\frac{r}{R} \right)^n,$$

на поверхности $r=R$

$$\varepsilon_n(\theta) < \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \left| \frac{2}{3} M^* n^{-3/2} + (h_1 - h_2) R (\eta - \sqrt{R} S_0) n^{-2} \right|.$$

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Դեղի համար ջերմահաղորդականության խառը եզրային խնդրի մասին

Հոդվածում դիտարկվում է գնդում ջերմության առանցքասիմետրիկ ստացիոնար բաշխումը՝ շրջապատող միջավայրի հետ ջերմափոխանակության դեպքում, երբ ջերմափոխանակության գործակիցը փոփոխվում է ըստ անկյան, հնդրի լուծումը տրվում է շարքով՝ ըստ Լեժանդրի բազմանդամների և ցուցչային ֆունկցիաների, որի անհայտ գործակիցները որոշվում են դժային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սխառումից:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Ք Յ Ո Ւ Ն

- ¹ Ր. Ս. Մինասյան, ДАН Арм. ССР, т. XXXIX, № 5 (1964) ² Ր. Ս. Մինասյան, В кн. Тепло и массоперенос, т. VIII, Вопросы теории тепло и массопереноса, Минск, 1968
- ³ Б. А. Васильев, Дифференциальные уравнения, т. 10, № 7, 1974. ⁴ А. Б. Ефимов, В. Н. Воробьев, ИФЖ, т. 26, № 5, 1974. ⁵ Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, «Наука», 1964. ⁶ Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952. ⁷ С. Н. Бернштейн, Собрание сочинений, т. II, АН СССР, 1954. ⁸ Л. В. Канторович, В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, 1962. ⁹ Ր. Ս. Մինասյան, «Известия АН Арм. ССР», серия физ. мат. наук, т. XI, № 3 (1958).