ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 3

УДК 519.2

МАТЕМАТИКА

С. Т. Мкртчян

Устойчивость характеризаций распределений и некоторые характеристические, в широком смысле, свойства нормального распределения

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Таляном 28/VI 1978)

1°. Пусть $x_1, \ldots x_n$—повторная выборка из совокупности с функцией распределения (ф. р.) $F(x)$. Известно много результатов о характеризации нормального распределения тем или иным свойством этой выборки ([1]). В заметке ([2]) обращалось внимание на то, что некоторые свойства P, характеризующие нормальное распределение могут быть ослаблены до свойств $\hat{P}$, представляющих собой аналоги свойств P в широком смысле (см. ([3]), гл. 2), что новое свойство $\hat{P}$ также является характеристическим, но уже для ф. р. $F(x)$, соответствующее число первых моментов которой совпадает с моментами некоторого нормального закона.

В настоящей заметке мы покажем, что исследование таких "расширений" $\hat{P}$, часто, по существу является исследованием устойчивости в некоторых специальных метриках свойств P (в смысле работы ([4])).

2°. Пусть X и Y два метрических пространства с метриками d_1 и d_2 соответственно, а J— отображение из X в Y. Если B некоторое подмножество Y, а $C=J^{-1}(B)$, то мы говорим о чистой задаче характеризации множества C свойством $J(z)\in B$, $z\in X$. В этой работе рассматривается частный случай задачи характеризации в смысле ([4]).

Скажем, что задача характеризации множества C устойчива в пределах множества $X'\subset X$, если для любой последовательности $z_1, z_2, \ldots, z_m, \ldots$ точек множества X' из условия

$$d_2(J(z_m), B)\xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

вытекает, что

$$d_1(z_m, C)\xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

(Это также частный случай определения устойчивости в смысле ([4]).

Скажем, что множество $A\subset X$ δ—компактно, если в нем существует конечная δ-сеть.

Обозначим через B_ε, ε—окрестность множества B.

Теорема 1. *Пусть X полное метрическое пространство, J—непрерывное отображение из X в Y, B—замкнутое подмножество Y, X'—замкнутое подмножество X и для любого $\varepsilon>0$ множество $J^{-1}(B_\varepsilon)\cap \cap X'_{\delta_\varepsilon}$—компактно, причем $\delta_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. При этих условиях задача характеризации множества $C=J^{-1}(B)$ устойчива в пределах множества X'.*

3. Пусть X совокупность одномерных ф. р. $F(x)$, а Y совокупность пар ф. р. $(G_1^{(u)}, G_2^{(u)})$. Рассмотрим две линейные формы

$$L_1=\sum_{j=1}^{n}a_j x_j,\quad L_2=\sum_{j=1}^{n}b_j x_j,$$

построенные по повторной выборке $x_1,\ldots,x_n$ из совокупности с ф. р. $F(x)$ и определим отображение J из X в Y, сопоставив ф. р. $F(x)$ пару маргинальных ф. р. $(G_1^{(u)}, G_2^{(u)})$ линейных форм L_1 и L_2.

Метрику d_1 в X определим соотношением

$$d_1(F_1, F_2)=\frac{1}{k+1},$$

если в точности первые моменты до порядка k ($k\geq 0$—целое) распределений существуют и равны, т. е. если

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^l\,dF_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}x^l\,dF_2(x),\quad l=0,1,\ldots,k,$$

причем указанные интегралы существуют, а моменты порядка $k+1$ либо не существуют, либо не равны друг другу. При этом мы отождествляем распределения, имеющие одинаковые (и конечные) моменты всех порядков.

Метрику d_2 в Y введем, положив

$$d_2((G_1, G_2), (G'_1, G'_2))=\max(d_1(G_1, G'_1), d_1(G_2, G'_2)).$$

Ясно, что отображение J непрерывно и

$$d_2(J(F_1), J(F_2))\leq d_1(F_1, F_2).$$

Теорема 2. *Пусть $B=\{(G_1, G_2)\in Y\colon G_1(u)=G_2(u)\ u\in R^1\}$, коэффициенты форм L_1 и L_2 удовлетворяют условиям*

$$\sum_{j=1}^{n}a_j^e\neq\sum_{j=1}^{n}b_j^e,\quad e=3, 4,\ldots, \tag{1}$$

и X'—множество ф. р. с конечными и заданными первым и вторым моментами. Тогда множество

$$J^{-1}(B_\varepsilon)\cap X'_{\delta_\varepsilon}\qquad \delta_\varepsilon=\frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1}\ \text{—}\ \textit{компактно.}$$

Следствие 1. При условиях (1) задача характеризации нормального распределения свойством одинаковой распределенности линейных форм L_1 и L_2 устойчива в пределах множества X', т. е. из совпадения первых k моментов форм L_1 и L_2 следует совпадение первых S_k моментов ф. р. $F(x)$ с соответствующими моментами некоторого нормального закона, причем $s_k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

4°. Пусть множества X, X' и метрика d_1 те же, что и в пункте 3°, а Y совокупность двумерных ф. р. $G(u, v)$. Метрику d_2 введем, положив

$$d_2(G_1, G_2) = \frac{1}{k+1},$$

если

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u^{l_1} u^{l_2} d\, G_1(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u^{l_1} u^{l_2} d\, G_2(u,v)\ l_1+l_2 \leq k\ l_i \geq 0,\ i=1,\ 2.$$

где указанные интегралы сходятся. Моменты порядка $k+1$ либо не существуют, либо не равны друг другу. Пусть B—множество ф. р. $G(u,v)$, представляемых в виде $G(u,v)=G_1(u)$, $G_2(v)$.

Из теоремы 2 вытекает.

Следствие 2. При выполнении условий

$$\sup_{t_1,t_2} \left| \sum_{j=1}^{n} |t_1a_j + t_2b_j|^l - \sum_{j=1}^{n} |(t_1a_j)^l + (t_2b_j)^l| \right| > 0,\ l=3,\ 4,\dots$$

задача характеризации нормального закона свойством независимости форм L_1 и L_2 устойчива.

Вычислительный центр
Госплана Армянской ССР

Ս. Թ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

Բաշխումների բնութագրման կայունությունը և նորմալ բաշխման որոշ լայն իմաստով բնութագրական հատկությունները

Հայտնի են շատ արդյունքներ նորմալ բաշխումը վերցվածքի այս կամ այն հատկությամբ բնութագրելու մասին։ Աշխատանքում նկատված է, որ նորմալ բաշխումը բնութագրող մի որևէ P հատկություն կարելի է փոխարինել մի ավելի թույլ $\hat{P}$ հատկությամբ, որն բնութագրում է արդեն բաշխում, որի համապատասխան կարգի մոմենտները համընկնում են որևէ նորմալ բաշխման մոմենտների հետ։ Այս աշխատանքում ցույց է տրված, որ այդպիսի «թուլացումը» կարելի է դիտել որպես P հատկության կայունության հետազոտում որոշ առանձնահատուկ մետրիկաներում։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао,* Характеризационные задачи математической статистики, М., 1972. [2] *А. М. Каган,* Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 61, 59—67, 1976. [3] *Дж. Дуб,* Вероятные процессы, М., 1956. [4] *В. М. Золотарев,* Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 61, 1976, 38—55. Эффект устойчивости характеризации распределений.