

УДК 539.3

МЕХАНИКА

М. В. Белубекин

О задаче колебаний мембраны в сверхзвуковом потоке газа

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 2/III 1978)

Обсуждаются известные результаты. Приводится новое решение для бесконечной мембраны.

1. Задача рассматривается в частном случае, когда возмущения распространяются только по направлению невозмущенного потока газа. Предполагается справедливость поршневой теории ⁽¹⁾. Аэродинамическое демпфирование не учитывается, так как оно не имеет качественного значения для обсуждаемых вопросов.

При указанных ограничениях уравнение колебаний мембраны имеет вид (2)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где

$$\beta = \gamma p_\infty M N_x^{-1}, \quad \alpha^2 = \rho_0 h N_x^{-1}.$$

Остальные обозначения идентичны обозначениям, принятым в ⁽²⁾.

Решение уравнения (1.1) должно удовлетворять следующим начальным условиям:

$$w(0, x) = \varphi(x), \quad \partial w(0, x) / \partial t = \psi(x). \quad (1.2)$$

В случае бесконечной мембраны ($-\infty < x < \infty$), так же как в известной задаче колебаний струны, функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны удовлетворять определенным условиям. В частности, они не должны бесконечно возрастать при $x \rightarrow \pm \infty$.

В работе ⁽³⁾ для бесконечной мембраны решение уравнения (1.1) представляется в виде:

$$w = A e^{i(\omega t - kx)}. \quad (1.3)$$

После подстановки (1.3) в (1.1) и решения соответствующего характеристического уравнения получается

$$w = A e^{i x / 2} \Phi(x, t), \quad (1.4)$$

где поведение решения при $x \rightarrow \pm \infty$ характеризуется экспоненциаль-

ным множителем и, следовательно, $w \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$. Отсюда делается вывод о наличии флаттера для бесконечной мембраны.

Однако решение типа (1.4) не может удовлетворять никаким начальным условиям, обеспечивающим корректность поставленной задачи. Единственный вывод, который можно сделать из (1.4), — задача колебаний мембраны при сверхзвуковом обтекании не допускает решения вида (1.3). Таким образом, для указанной задачи установившиеся колебания невозможны.

2. Уравнение (1.1) имеет автомодельное решение, которое можно получить при помощи следующего преобразования:

$$\tau = x, \quad \tau = -\frac{\beta}{2\alpha} (t^2 - \alpha^2 x^2)^{1/2}, \quad \beta > 0, \quad t > \alpha|x|$$

$$w = u(\tau) \exp(\beta t/2). \quad (2.1)$$

Вычисляя производные w и подставляя в уравнение (1.1), для определения функции $u(\tau)$ получим уравнение Бесселя

$$\tau \frac{d^2 u}{d\tau^2} + \frac{du}{d\tau} + \tau u = 0. \quad (2.2)$$

Общее решение уравнения (2.2) выражается через функции Бесселя 1-го и 2-го рода индекса нуль

$$u = C_1 J_0(\tau) + C_2 Y_0(\tau). \quad (2.3)$$

При $0 < t < \alpha|x|$, заменой $\tau = -i\eta$, для функции $u(\eta)$ получается решение при помощи соответствующих функций Бесселя чисто мнимого аргумента.

Основываясь на (2.1) и (2.3), рассмотрим следующее решение уравнения (1.1):

$$w = e^{\beta t/2} \left\{ C_1 J_0 \left[\frac{\beta}{2\alpha} (t^2 - \alpha^2 x^2)^{1/2} \right] + C_2 Y_0 \left[\frac{\beta}{2\alpha} (t^2 - \alpha^2 x^2)^{1/2} \right] \right\}$$

$$\text{при } t > \alpha|x|$$

$$w = 0 \quad \text{при } t < \alpha|x|. \quad (2.4)$$

Решение (2.4) удовлетворяет начальным условиям (1.2), если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ импульсивные в точке $x=0$.

Замечая, что характер решения при произвольных начальных условиях и для больших значений t будет таким же, что и характер решения (2.4), рассмотрим решение (2.4) для фиксированной точки x и для больших значений аргумента ⁽⁴⁾

$$w \approx \sqrt{\frac{4\alpha}{\pi\beta(t^2 - \alpha^2 x^2)^{1/2}}} e^{\beta t/2} \left\{ C_1 \cos \left[\frac{\beta}{2\alpha} (t^2 - \alpha^2 x^2)^{1/2} - \frac{\pi}{4} \right] + \right.$$

$$\left. + C_2 \sin \left[\frac{\beta}{2\alpha} (t^2 - \alpha^2 x^2)^{1/2} - \frac{\pi}{4} \right] \right\}. \quad (2.5)$$

Из (2.4) видно, что при прохождении волны через фиксированную точку x , в точке x импульсивно возникают колебания. Причем чем дальше точка $x > 0$ от начала координат, тем больше амплитуда возникающих колебаний (зависимость экспоненциальная). Согласно (2.5), каким бы ни была амплитуда колебаний в момент прохождения волны, она стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, для заданной задачи явление флаттера, в обычном смысле, не наблюдается. Однако имеется экспоненциальное возрастание возмущений по мере удаления от источника возмущений по направлению потока газа. С другой стороны, уравнение (1.1) может описать только малые возмущения. Поэтому предполагается, что задачу колебаний мембраны с достаточно большими размерами по направлению сверхзвукового потока газа необходимо исследовать либо на основе нелинейной теории (большие прогибы), либо на основе иных критериев устойчивости, использующих ограничения на возможные прогибы мембраны.

3. Рассмотрим бесконечную полосу мембраны ($0 \leq x \leq l$). В этом случае решение уравнения (1.1), кроме начальных условий (1.2), должно удовлетворять также граничным условиям на кромках мембраны $x = 0$ и $x = l$.

Наиболее общие однородные граничные условия имеют вид:

$$w(0, t) + h_1 \partial w(0, t) / \partial x = 0, \quad w(l, t) + h_2 \partial w(l, t) / \partial x = 0, \quad (3.1)$$

где h_1 и h_2 произвольные постоянные.

Представляя решение задачи в виде

$$w = T(t)X(x)$$

получим для определения $X(x)$ следующую задачу на собственные значения:

$$X'' - \beta X' + \lambda X = 0,$$

$$X(0) + h_1 X'(0) = 0, \quad X(l) + h_2 X'(l) = 0. \quad (3.2)$$

Легко заметить, что задача (3.2) несамосопряженная. Это обстоятельство, в свое время, послужило поводом для сомнений относительно применимости метода Галеркина к задаче флаттера пластинки, которая, по существу, приводится к несамосопряженной задаче. Однако, изучая решение задачи флаттера пластинки, В. В. Болотин (9.3) показал, что нельзя судить о применимости метода Галеркина к задачам флаттера пластинки, основываясь на применимости того же метода к задаче флаттера мембраны.

К этому же выводу можно прийти и другим способом. После преобразования

$$X(x) = e^{\beta/2 x} Y(x) \quad (3.3)$$

задача (3.2) приведется к виду:

$$Y'' + \lambda(1 - \beta^2/4)Y = 0,$$

$$(1 + h_1 \beta/2)Y(0) + h_1 Y'(0) = 0, \quad (1 + h_2 \beta/2)Y(l) + h_2 Y'(l) = 0. \quad (3.4)$$

Задача (3.4) — самосопряженная. Таким образом, задача обтекания мембраны, по существу, приводится к решению самосопряженной задачи, в то время как задача флаттера пластинки приводится к существенно несамосопряженной задаче. Следовательно, проведение аналогии о применимости метода Галеркина к этим задачам недопустимо.

Из условия самосопряженности легко получить также, что явление флаттера мембраны не имеет места ни при каких значениях величин A_1 и A_2 , определяющих граничные условия.

Кроме того, из (3.3 и (3.4) ясно, что для эффективности применения метода Галеркина к рассматриваемой задаче выбранная система функций должна иметь общий множитель $\exp(3x/2)$. Некоторые вопросы сходимости метода Галеркина в частной задаче с условиями закрепления кромок ($A_1 = A_2 = 0$) обсуждаются в (6).

Легко показать, что приведенные выше выводы остаются в силе и при учете демпфирования.

Отметим, что здесь не рассматривались неоднородные граничные условия. Наличие их может привести к появлению флаттера (7). При этом может оказаться также, что учет демпфирования существенен.

Институт механики

Академии наук Армянской ССР

Գ. Վ. ՔԱՅՐԻՔՅԱՆԸ

Գերձայնային զազի հոսանքում մեմբրանի տատանումների խնդրի մասին

Քերված է գերձայնային հոսանքում աեզերը մեմբրանի տատանումների խնդրի լուծումը, երբ սեզրեական պայմանները իմպուլսային են, լուծումը ցույց է տալիս, որ տատանումները ժամանակի բեթացքում մարում են:

Վերջավոր մեմբրանի համար ցույց է տրվում, որ կամայական համասեռ եզրային պայմանների գեպքում խնդիրը քերվում է ինքնահամալուծ խնդրի լուծման, որտեղից եււյնպէս ստացվում է, որ ժամանակի բեթացքում տատանումները մարում են:

Այսպիսով, գերձայնային արագությամբ մեմբրանի շրջհոսման ժամանակ, ի տարբերություն սալի շրջհոսման խնդրի, ֆլատերի երեւոյթ տեղի չունի:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ А. А. Никомин, ПММ, 20, № 6 (1956) ² В. В. Болотин, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости, Физматгиз, М., 1961. ³ S. Kaliski, Bul. de L. Acad. Pol. des sciences v. XV, № 2 (1957). ⁴ Б. Г. Кирпичев, Введение в теорию бесконечных функций изд. „Наука“, М., 1971. ⁵ В. П. Болотин, „Известия высш. шк. физ.-матем. науки“, сер. Машиностроение, № 11, 1959. ⁶ R. Heiser, Z. angew. Math. Phys., 57, № 5, 1977. ⁷ Л. А. Мовсисян, „Прикладная механика“, т. 3, в. 8 (1967).