ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 2

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

М. В. Казарян

О сепаратно мероморфных функциях

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 19/VI 1978)

Согласно фундаментальной теореме Гартогса функция f, определенная в области $D\subset C^N$, $N>1$, голоморфная по каждой переменной при фиксированных остальных, является голоморфной в D.

Существенным усилением этого результата является следующая теорема (Сичак [1]). Пусть D_k—область комплексной z_k—плоскости, $E_k\subset D_k$ — регулярный компакт и $h(z_k, E_k, D_k)$ — гармоническая мера E_k относительно ∂D_k, $k=1, 2, \ldots, n$. Пусть функция $f(z)=$ $=f(z_1, \ldots, z_n)$ определена и сепаратно голоморфна на множестве $X=(D_1\times E_2\times\cdots\times E_n)\cup\cdots\cup(E_1\times\cdots\times E_{n-1}\times D_n)$, т. е. для любого фиксированного $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n)\in E_1\times\ldots\times E_{k-1}\times$ $\times E_{k+1}\times\cdots\times E_n$ функция $f(a_1, \ldots, a_{k-1}, z_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ голоморфна в D_k, $k=1, 2, \ldots, n$.

Тогда

1) f продолжается до функции $\tilde{f}$, голоморфной в

$$\Omega=\{z\in D_1\times\ldots\times D_n: h(z_1, E_1, D_1)+\ldots+h(z_n, E_n, D_n)<1\}$$

2) Ω — оболочка голоморфности множества X.

В настоящей работе, которая является продолжением работы [2], аналогичные вопросы в более общей ситуации рассматриваются для мероморфных функций.

Ввиду наличия особенностей у мероморфных функций, само понятие сепаратной мероморфности требует дополнительного уточнения. Приведем его в более общей ситуации, чем это надо для наших теорем.

Пусть $D\subset C^n_z$, $G\subset C^m_w$—произвольные области, $E\subset D$, $F\subset G$—относительно замкнутые множества и $X=(D\times F)\cup(E\times G)$. Пусть, далее, функция $f=f(z, w)$ со значениями в $\overline{C}=C\cup\{\infty\}$ определена на X, за исключением некоторого замкнутого множества $A\subset X$ нулевой C^{n+m}-емкости. Обозначим через A' (соответственно A'') множество всех $z\in D$ $(w\in G)$ для которых $\{z\}\times G\subset A$ $(D\times\{w\}\subset A)$.

Тогда, если

1) $f(z, w_0)$ как функция от z мероморфно продолжается в D для любого фиксированного $w_0 \in F \setminus A''$

2) $f(z_0, w)$ как функция от w мероморфно продолжается в G для любого фиксированного $z_0 \in E \setminus A'$,

то мы говорим, что функция f сепаратно мероморфна на множестве X (множество A мы будем называть множеством неопределенностей сепаратной мероморфной функции f).

Множество $E \subset C^n$ назовем C^n-регулярным в точке $z_0 \in C^n$ если $z_0 \in \overline{E}$ (замыкание E) и для любой плюрисубгармонической в окрестности z_0 функции φ справедливо равенство

$$\varphi(z_0) = \limsup_{z \to z_0,\ z \in E} \varphi(z).$$

Множество C^n—регулярных точек для E обозначим через E^*. Множество $E \subset C^n$ будем называть C^n-регулярным, если оно C^n-регулярно в каждой точке своего замыкания, т. е. если $E^* = \overline{E}$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. *Пусть D и G—области в C_z и C^m_w соответственно, $E \subset D$, $F \subset G$, C и C^m—регулярные компакты. Тогда любая сепаратно мероморфная на множестве $X = (D \times F) \cup (E \times G)$ функция $f(z, w)$ продолжается до функции, мероморфной в окрестности X.*

Теорема, по-видимому верна и в общем случае $D \subset C^n_z$, но наше доказательство проходит, только когда область D одномерна. Лишь в случае, когда $D = D_1 \times \cdots \times D_n$ и $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, где $E_k \subset D_k$—регулярные компакты, а $D_k \subset Cz_k$—области, $k = 1, 2, \ldots, n$ аналогичная теорема тоже верна.

Для доказательства теоремы нам нужны некоторые обобщения известной леммы Ротштейна ([3]), которая в свою очередь является обобщением основной леммы Гартогса на мероморфные функции.

Лемма 1. *Пусть $D \subset C^n_z$, $G \subset G_1 \subset C^m_w$—произвольные области, функция $f = f(z, w)$ определена в $D \times G_1$ за исключением замкнутого множества A нулевой C^{n+m}—емкости и мероморфна в $D \times G$. Тогда, если для любого $z_0 \in D \setminus A'$ функция $f(z_0, w)$ мероморфно по w продолжается в G_1, то f мероморфна в $D \times G_1$.*

При $m = 1$ в случае, когда D—поликруг, G и G_1 концентрические круги, это лемма Ротштейна.

Лемма 2. *Пусть $D \subset C^n_z$—произвольная область и $E \subset D$ компакт положительной C^n—емкости, пусть $G \subset G_1$ области в C^m_w, а функция $f = f(z, w)$ голоморфна в $D \times G$. Тогда, если для любого фиксированного $z_0 \in E$ функция $f(z_0, w)$ мероморфна по w в G_1, то f мероморфна в некоторой окрестности $E^* \times G_1$.*

Доказательство в случае $m = 1$ получается из свойства полунепрерывности снизу радиуса мероморфности мероморфной в $D \times G$ функции f по направлению w. В общем случае доказательство сводится к случаю поликруга и получается индукцией по числу переменных m. Через $c_n(E)$ будем обозначать C^n-емкость множества $E\subset C^n$.

Лемма 3. *Пусть* $D\subset C^n_z$, $G\subset C^m_w$ — *произвольные области*, $E\subset D$, $F\subset G$ *множества положительной* C^n *и* C^m — *емкости соответственно и функция* $f=f(z, w)$ *сепаратно мероморфна на множестве* $X=(D\times F)\cup(E\times G)$. *Тогда существуют области* $D_0\subset D$, $G_0\subset G$ *и компакты* $E_0\subset E\cap D_0$, $F_0\subset F\cap G_0$, $c_n(E_0)>0$, $c_m(F_0)>0$ *такие, что* f *сепаратно голоморфна и ограничена на множестве* $X_0=$ $=(D_0\times F_0)\cup(E_0\times G_0)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 в работе ([2]) только вместо кругов с рациональными центрами и радиусами надо рассматривать множества вида $\{w\in G:|\varphi_i(w)|<\varepsilon\}$, где $\{\varphi_i\}$ — счетное плотное подмножество в пространстве функций, голоморфных в G и ε — рациональные числа.

Следующая лемма легко следует из работы Сичака ([1]).

Лемма 4. *Пусть* D — *область в комплексной* z — *плоскости*, $E\subset D$ *компактное множество положительной емкости*, $G\subset C^m_w$ — *открытое множество и* $F\subset G$ *компакт. Тогда, если функция* (z, w) *сепаратно голоморфна на множестве* $X=(D\times F)\cup(E\times G)$ *и ограничена на* $E\times G$, *то для любой регулярной точки* w *компакта* $F(w_0\in F^*)$ *существует положительное число* $\delta>0$ *и область* D' *такие, что* $E\subset D'\subset D$ и $f=f(z, w)$ *голоморфно продолжается в* $D'\times\{w\in G:|w, w_0|<\delta\}$.

Доказательство теоремы 1. Поскольку f сепаратно мероморфна на X, а C^n — емкость C^n — регулярного компакта больше нуля, то по лемме 3 существуют подобласти $D_0\subset D$, $G_0\subset G$ и компакты $E_0\subset E\cap D_0$, $F_0\subset F\cap G_0$ положительной C и C^m — емкости соответственно такие, что функция f сепаратно голоморфна и ограничена на множестве $X_0=(D_0\times F_0)\cup$ $\cup(E_0\times G_0)$. По лемме 4 для любых фиксированных $(z_0, w_0)\in E_0\times F^*_0$ существует поликруг $U\times V$ с центром в этой точке, куда f голоморфно продолжается. Применяя лемму 2, получим отсюда, что f продолжается до функции, мероморфной в окрестности множества $(D\times F^*_0)\cup(E_0\times G)$. Далее, используя лемму Цорна точно так, как в ([2]), получим, что f мероморфна в окрестности множества $(E_1\times G)\cup$ $\cup(D\times F_1)$, где $E_1\subset E$, $F_1\subset F$ и $c(E/E_1)=c_m(F/F_1)=0$.

Наконец, используя регулярность компактов E и F, отсюда можно получить мероморфность f в окрестности X.

Следствие 1. *Пусть* D_k — *область комплексной* z_k — *плоскости*, $E_k\subset D_k$ — *регулярный компакт*, $k=1, 2, \ldots, n$, $D=D_1\times\ldots\times D_n$, $E=E_1\times\ldots\times E_n$. *Пусть далее* $G\subset C^m_w$ — *произвольная область*, $F\subset G$ C^m — *регулярный компакт и функция* $f=f(z, w)$ *сепаратно* мероморфна на множестве $X=(D\times F)\cup(E\times G)$. *Тогда* f *продолжается до функции, мероморфной в окрестности* X.

Доказательство. При $m=1$ эту теорему мы только что доказали. Далее продолжим по индукции. Пусть $E_{n+1} \subset D_{n+1} \subset C_{z_{n+1}}$, $D' = D \times D_{n+1}$, $E' = E \times E_{n+1}$, $z' = (z, z_{n+1})$, $X' = (D' \times F) \cup (E' \times G)$, а функция $f(z', w)$ сепаратно мероморфна на X'. Фиксируем произвольную точку $z_0 \in E \setminus A'$ и рассмотрим функцию $f_{z_0}(z_{n+1}, w) = f(z_0, z_{n+1}, w)$. Она сепаратно мероморфна на множестве $(D_{n+1} \times F) \cup (E_{n+1} \times G)$ и следовательно, по доказанной теореме f_{z_0} мероморфна в некоторой его окрестности ω. С другой стороны поскольку $f(z', w)$ мероморфна в D' для любого фиксированного $w_0 \in F \setminus A''$, то получаем, что f сепаратно мероморфна на множестве $[D \times (E_{n+1} \times F)] \cup (E \times \omega)$. По индуктивному предположению она мероморфна в некоторой окрестности ω' этого множества, а ω', очевидно, содержит X'.

Следствие 2. *Пусть D — область комплексной z — плоскости, $E \subset D$ — компакт положительной ёмкости и $G \subset C^m_w$ — открытое множество. Пусть далее, функция $f = f(z, w)$ сепаратно мероморфна на множестве $(D \times G) \cup (E \times G)$ т. е.*

1) $f(z, w_0)$ мероморфно по z продолжается в D для любого фиксированного $w_0 \in G \setminus A''$

2) $f(z_0, w)$ мероморфно по w продолжается в C для любого фиксированного $z_0 \in E \setminus A'$.

Тогда f мероморфна в $D \times G$.

Доказательство. Пусть $w_0 \in G$ произвольная точка, $F = \{w: |w - w_0| < r\} \subset G$, $r = (r_1, \ldots, r_m)$; $r_k > 0$, $k = 1, 2, .$
Тогда, по теореме 1, f мероморфна на $D \times F$, а в силу произвольности $w_0 \in G$ она мероморфна в $D \times G$.

Замечание. Вопрос об оболочке мероморфности множества X (т. е. максимальной области, куда мероморфно продолжается любая мероморфная на X функция) мы не рассматриваем по той простой причине, что она совпадает с его оболочкой голоморфности Ω, описанной Сичаком в [1]. Действительно, в любой области $D \subset C^n$ разрешима слабая проблема Пуанкаре (см. [4]) т. е. если f мероморфна в D, то её можно представить в виде h/g, где h и g голоморфны в D. Поскольку любая сепаратно мероморфная на X функция f мероморфна в некоторой окрестности ω множества X, то f является отношением двух голоморфных в ω функций h и g. Продолжим их соответственно до функции $\bar{h}$ и $\bar{g}$ голоморфных в Ω. Тогда функция $\bar{f} = \bar{h}/\bar{g}$ мероморфна в Ω и совпадает с f на X.

Ереванский электротехнический завод

Մ. Վ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Սեպարատ մերոմորֆ ֆունկցիաների մասին

Հոդվածում դիտարկվում են C^N, $N>1$ տարածության որոշակի տեսքի բազմության վրա սեպարատ մերոմորֆ ֆունկցիայի մերոմորֆ շարունակելիության որոշ հարցեր։

Դիցուք տված են $D\subset C_z^n$, $G\subset C_w^m$ տիրույթները, $E\subset D$ և $F\subset G$ համապատասխան փակ բազմությունները և թող $X=(D\times F)\cup(E\times G)$։ Ենթադրվում է, որ $D\times G\subset C^{n+m}$ տիրույթում տրված է մի A բազմություն, որի C^{n+m}-չափը զրո է։ A'-ով նշանակենք այն $z\in D$ կետերի բազմությունը, որոնց համար $\{z\}\times G\subset A$։ Նույն կերպ սահմանվում է A'' բազմությունը։ Կասենք $X\setminus A$ բազմության վրա որոշված $f=f(z, w)$ ֆունկցիան սեպարատ մերոմորֆ է X-ի վրա, եթե

1) $f(z, w_0)$-ն որպես ֆունկցիա z-ից ամեն մի $w_0\in F\setminus A''$ ֆիքսած կետի համար մերոմորֆ շարունակվում է D տիրույթ։

2) $f(z_0, w)$-ն որպես ֆունկցիա w-ից ամեն մի $z_0\in E\setminus A'$ ֆիքսած կետի համար մերոմորֆ շարունակվում է G տիրույթ։

Թեորեմ. Դիցուք $D\subset C_z^n$ և $G\subset C_w^m$ կամայական տիրույթներ են, $E\subset D$ և $F\subset G$ համապատասխանաբար C^n և C^m—ռեգուլյար կոմպակտներ են, իսկ ֆունկցիան սեպարատ մերոմորֆ է $X=(D\times F)\cup(E\times G)$ բազմության վրա։ Այդ դեպքում f-ը կարելի է շարունակել X-ի որևէ շրջակայք, որպես մերոմորֆ ֆունկցիա։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *J. Siciak*, Ann. Polon. Math., 22(1969), 145—171. [2] *М. В. Казарян*, Матем. сб., 99(141), 538—548, № 4 (1976). [3] *W. Rothstein*, Math. Z., 84—95, 53(1960). [4] *J. Kajiwara*, Mem. Fac. Sci., Kyusyu Univ. Ser. A, 22, 9—17 № 1 (1968).