

УДК 550.835

ГЕОФИЗИКА

Е. П. Леман, А. А. Тамразян, В. А. Арицбашев

Эффективные коэффициенты ослабления гамма-квантов  
в гетерогенных средах с биномиальным законом распределения  
неоднородностей

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Г. Назаровым 24/V 1978)

Определение эффективных коэффициентов взаимодействия гамма-квантов с гетерогенной средой является основной задачей теории защиты и прикладной ядерной геофизики. В частности, ее решение необходимо для развития теории гамма-методов анализа горных пород и руд, которые являются гетерогенными средами.

Известно, что при прохождении гамма-квантов через гетерогенную среду ослабление потока излучения происходит по экспоненциальному закону Бэра, согласно которому

$$N = N_0 \cdot \exp(-\bar{\mu}_{\gamma\phi} \cdot \rho x), \quad (1)$$

где  $N_0$  — поток квантов с энергией  $E$  на поверхности среды,  $N$  — тот же поток на глубине  $x$ ,  $\rho$  — плотность среды, а  $\bar{\mu}_{\gamma\phi}$  — массовый эффективный коэффициент ослабления квантов в среде. Величина  $\bar{\mu}_{\gamma\phi}$  для гетерогенной среды определяется не только ее вещественным составом и концентрацией неоднородностей в ней, но и формой, размерами, ориентацией и, наконец, характером распределения этих неоднородностей. При решении задач прикладной ядерной геофизики, связанных с прохождением фотонов через горные породы и руды, обычно предполагают, что распределение неоднородностей, под которыми понимают рудные зерна или включения, подчиняется в гетерогенной среде закону Пуассона (1-4). Однако распределение Пуассона справедливо лишь в том случае, когда среднее количество рудных зерен в единице объема исследуемой среды велико, а их средняя концентрация в гетерогенной среде мала (близка к нулю). Следовательно, распределение Пуассона и получаемые с его помощью решения правильно описывают взаимодействие гамма-квантов с гетерогенными средами лишь при малых концентрациях сравнительно мелких рудных зерен.

Между тем распределение Пуассона является предельным случаем более общего, биномиального распределения, которое свободно от

указанных выше ограничений. Поэтому естественно считать, что распределение неоднородностей в гетерогенной среде подчиняется биномиальному закону, используя который можно получить наиболее общее решение.

Применяя к решению задачи подход и схему расчета, развитые в работе (1), рассмотрим вопрос об ослаблении потока квантов монохроматического гамма-излучения с энергией  $E$  в полубесконечной гетерогенной среде, состоящей из однородного наполнителя  $H$  и рудных зерен  $A$ , имеющих форму куба с ребром  $D$ . Будем считать поверхность среды плоской, падение излучения по отношению к ней нормальным, а ориентацию зерен в среде такой, что их грани параллельны поверхности раздела. Если поток квантов на поверхности среды через площадку  $D^2$  равен  $N_0$ , то его ослабление в наполнителе при прохождении слоя  $x$  может быть учтено множителем  $\exp[-\bar{\mu}_H \rho (1-q)x]$ , где  $\rho$  — средняя плотность гетерогенной среды,  $q$  — средняя концентрация рудных зерен в этой среде,  $(1-q)$  — средняя концентрация однородного наполнителя с массовым коэффициентом ослабления  $\bar{\mu}_H$ . Ослабление потока в рудных зернах зависит от их числа и учитывается множителем  $\exp(-\bar{\mu}_A \rho_A K D)$ , где  $\rho_A$  — плотность рудного вещества, из которого состоят зерна,  $\bar{\mu}_A$  — его массовый коэффициент ослабления,  $K$  — число рудных зерен в гетерогенной среде, встретившихся в объеме  $V = D^2 x$  на пути  $x$ . Тогда поток квантов на глубине  $x$  равен

$$N = N_0 \exp[-\bar{\mu}_H \rho (1-q)x] \exp(-\bar{\mu}_A \rho_A K D).$$

Если считать, что распределение рудных зерен в гетерогенной среде подчиняется биномиальному закону, то вероятность появления  $K$  рудных зерен на пути  $x$  в объеме  $V = D^2 x$  равна

$$P_k = \frac{a! q^k (1-q)^{a-k}}{k! (a-k)!},$$

где  $a$  — максимально возможное количество рудных зерен в объеме  $V = D^2 x$ , равное

$$a = n/q = \rho x / (\rho_A D), \quad (2)$$

а  $n$  — среднее число рудных зерен в объеме  $V = D^2 x$  при их средней концентрации  $q$  в гетерогенной среде, равное  $n = \rho q x / (\rho_A D)$ . Тогда поток квантов на глубине  $x$  равен

$$\begin{aligned} N &= N_0 \exp[-\bar{\mu}_H \rho (1-q)x] \sum_{k=0}^a \exp(-\bar{\mu}_A \rho_A K D) P_k = \\ &= N_0 \exp[-\bar{\mu}_H \rho (1-q)x] [1 - q \{1 - \exp(-\bar{\mu}_A \rho_A D)\}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Для получения равенства (3) необходимо воспользоваться выражением производящей функции биномиального распределения (5), которое в наших обозначениях имеет вид

$$P(t) = \sum_{K=0}^a \frac{a!}{K!(a-K)!} q^K (1-q)^{a-K} \cdot t^K = |qt + (1-q)|^a.$$

где  $t = \exp(-\bar{\mu}_A \rho_A D)$ . Сравнивая формулы (1) и (3), находим выражение эффективного массового коэффициента ослабления фотонов в гетерогенной среде с кубическими рудными зёрнами

$$\bar{\mu}_{эф} = \bar{\mu}_H (1-q) - \frac{1}{\rho_A D} \ln |1-q| 1 - \exp(-\bar{\mu}_A \rho_A D)|. \quad (4)$$

Нетрудно убедиться, что при  $D=0$  выражение (4) для эффективного массового коэффициента ослабления излучения в гетерогенной среде переходит в общезвестную формулу для среднего массового коэффициента  $\bar{\mu}_{ср}$  ослабления гомогенной среды, т. е.

$$\bar{\mu}_{эф} = \bar{\mu}_{ср} = \bar{\mu}_H (1-q) + \bar{\mu}_A q,$$

т. к.  $\exp(-x) \approx 1-x$ , а  $\ln(1-x) \approx -x$  при  $x \rightarrow 0$ .

Если  $a \rightarrow \infty$ ,  $q \rightarrow 0$  так, что  $aq \rightarrow n$ , то биномиальное распределение переходит в распределение Пуассона. Это обстоятельство позволяет непосредственно из равенства (4), полагая  $q \rightarrow 0$  и ограничиваясь первым порядком малости, получить выражение  $\bar{\mu}_{эф}$  для гетерогенной среды с распределением рудных зёрен, подчиняющимся закону Пуассона (1):

$$\bar{\mu}_{эф} = \bar{\mu}_H (1-q) + \frac{q}{\rho_A D} [1 - \exp(-\bar{\mu}_A \rho_A D)].$$

Если в формуле (4) заменить  $\bar{\mu}$  на  $\bar{\tau}$  или  $\bar{\sigma}$ , то получим соответствующие выражения эффективных коэффициентов фотопоглощения или рассеяния для гетерогенной среды.

Аналогичным путем можно получить выражения  $\bar{\mu}_{эф}$  для гетерогенных сред с частицами другой геометрической формы. Например, для двухкомпонентной среды, состоящей из однородного наполнителя и рудных зёрен сферической формы с диаметром  $D$  находим

$$\bar{\mu}_{эф} = \bar{\mu}_H (1-q) - \frac{1}{\rho_A D} \ln \left\{ 1 - \frac{3}{2} q + \frac{3q}{\mu_A^2 \rho_A^2 D^2} \left[ 1 - (1 + \mu_A \rho_A D) \exp(-\bar{\mu}_A \rho_A D) \right] \right\}$$

Полученные решения легко обобщаются для многокомпонентной гетерогенной среды. В частности для трехкомпонентной гетерогенной среды, состоящей из гомогенного наполнителя  $H$  и кубических рудных зёрен сортов  $A$  и  $M$  с размерами  $D_A$  и  $D_M$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{эф} = & \bar{\mu}_H (1-q_A - q_M) - \frac{1}{\rho_A D_A} \ln \left\{ 1 - q_A \left[ 1 - \exp(-\bar{\mu}_A \rho_A D_A) \right] \right\} - \\ & - \frac{1}{\rho_M D_M} \ln \left\{ 1 - q_M \left[ 1 - \exp(-\bar{\mu}_M \rho_M D_M) \right] \right\}. \end{aligned}$$

где  $q_A$  и  $q_M$  — концентрации зерен  $A$  и  $M$  в гетерогенной среде,  $\rho_A$  и  $\rho_M$  — плотности рудного вещества, из которого состоят зерна  $A$  и  $M$ ,  $\bar{\mu}_A$  и  $\bar{\mu}_M$  — массовые коэффициенты ослабления фотонов в зернах  $A$  и  $M$ . Нетрудно получить формулу  $\bar{\mu}_{эф}$  для гетерогенной среды, в которой рудная фаза представлена зернами одной формы, но различных размеров. В общем случае если многокомпонентная гетерогенная среда состоит из гомогенного наполнителя и кубических рудных зерен различного состава и размера, то

$$\bar{\mu}_{эф} = \bar{\mu}_H \left( 1 - \sum_{(i,j)} q_{i,j} \right) - \sum_{(i,j)} \frac{i}{\rho_{i,j} D_{i,j}} \cdot \ln \left\{ 1 - q_{i,j} \cdot [1 - \exp(-\bar{\mu}_{i,j} \cdot \rho_{i,j} \cdot D_{i,j})] \right\}, \quad (5)$$

где  $i$  — сортность частиц по составу, а  $j$  — их сортность по размерам.

Полученные решения отличаются от ранее известных (<sup>3,6</sup>) прежде всего моделью гетерогенной среды, которая в данном случае не предусматривает упаковки рудных зерен и безрудного наполнителя в регулярные однозернистые слои и, следовательно, является более общей по сравнению с ранее использованными.

Выражения, полученные для эффективных коэффициентов ослабления фотонов в гетерогенных средах, могут быть использованы при расчетах гамма-полей, а также при решении задач теории защиты или прикладной ядерной геофизики, в частности, при определении интенсивности вторичных излучений от гетерогенных сред, каковыми являются, например, горные породы и руды.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Институт геофизики и инженерной  
сейсмологии академии наук Армянской ССР

Ե. Պ. ԼՅՄԱՆ, Ա. Ա. ՔԱՄՐԱԶՅԱՆ, Վ. Ա. ԱՐՅԻՐԱՇԵՎ

Պատմա-ֆիզիկական բույացման էֆեկտիվ գործակիցները բինոմալ օրենքով բաշխված անհամասեռությամբ տարակազմ միջավայրում

Տարակազմ միջավայրում գամմա-ֆիզիկական բույացման էֆեկտիվ գործակիցների որոշումը հանդիսանում է ռադիոակտիվ ճառագայթների պաշտպանության տեսության և կիրառական միջուկային հրկրաֆիզիկայի կարևորագույն խնդիրներից մեկը: Մասնավորապես դրա լուծումն անհրաժեշտ է լինային ասպարների և հանքանյութերի գամմա մեթոդով անալիզի տեսության զարգացման համար:

Այդ գործակիցների հաշվման ժամանակ ընդունվել է, որ հանքային հատիկների բաշխումը միջավայրում ենթարկվում է բինոմալ օրենքին: Այնուհետև դուրս է բերվել ընդհանուր բանաձև ռազմարադադրիչ միջավայրում գամմա-ֆիզիկական բույացման էֆեկտիվ գործակիցները հաշվելու համար:

## ЛИТЕРАТУРА — ҒРЦЧЦЪПЪЭПЪЪ

- <sup>1</sup> В. А. Арцыбашев, Е. П. Леман, Атомная энергия, т. 44, вып. 1, 1978. <sup>2</sup> Е. П. Леман, В. Н. Орлов, Ю. С. Медведев, Методы разведочной геофизики, вып. 25, 83—100, 1975. <sup>3</sup> А. Г. Хиславский, Р. И. Плотников, Е. Д. Кохов, «Заводская лаборатория», т. 39, № 6, 691—696, 1973. <sup>4</sup> Л. И. Шмонин, Г. К. Потребенников, В кн. Геофизические поиски рудных месторождений, т. 2 (ядерная геофизика), 93—100, Алма-Ата, 1971. <sup>5</sup> М. Дж. Кендалл, А. Стюарт, Теория распределений, «Наука», 588, М., 1966. <sup>6</sup> G. V. Mitra, A. J. C. Wilson, British Journal of Applied Physics, vol. 11, № 1, p. 43—45, 1960.