ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 1

УДК 539.121.

ФИЗИКА

В. О. Папанян

Обобщенное представление собственного времени для квантовой электродинамики на малых расстояниях

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаеляном 6/XII 1977)

1. В квантовой электродинамике (КЭД) особенно актуален вопрос внутренней замкнутости теории, так как с одной стороны расчеты по теории возмущений (ТВ) блестяще согласуются с экспериментальными результатами, а с другой стороны успехи в изучении калибровочных теорий показали, что КЭД естественно входит в общую схему единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий. В связи с этим очень важно исследовать поведение КЭД на малых расстояниях ([1–4]), в частности, вблизи точечного пробного заряда, методами ренорм—группы.

Гелл-Манном и Лоу ([1]) была введена функция $\Psi(z)$ и было показано, что существование нуля этой функции при некотором конечном $z=z_0$ означает конечность предельного затравочного заряда КЭД и возможность замкнутой теории. Так как точная функция Гелл—Манна—Лоу (ГМЛ) в настоящее время неизвестна, то исследуют ее разложение в ряд ТВ.

$$\Psi^{(a)}=z\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n^a\left(\frac{z}{\pi}\right)^n. \tag{1}$$

Для различных ренорм—инвариантных зарядов ([4–6]) функции $\Psi^{(a)}$ различаются начиная с третьего члена в силу однопараметрического произвола ренорм—группы, хотя при больших значениях аргументов функция ГМЛ определяется единственным образом.

2. Исходя из представления Челлена—Лемана ([7]) для пропагатора фотона

$$d(k^2/m^2)=1+k^2\int_0^{\infty}\frac{dM^2}{M^2}\,\frac{\rho_{\text{эл}}(M^2/m^2)}{M^2+k^2-i\varepsilon}, \tag{2}$$

где точный пропагатор в калибровке Ландау:

$$D_{\mu\nu}=(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/k^2)\alpha d(k^2/m^2,\alpha)/k^2, \tag{3}$$

введем новую спектральную функцию следующим образом*)

$$F_\nu(1/sm^{2\nu},\alpha)=1+\int\limits_0^\infty\frac{d\zeta}{\zeta}\exp[-s(m^2\zeta)^\nu]\,\rho_{\text{ч.л}}(\zeta) \tag{4}$$

Эта функция в частном случае $\nu=1/2$ совпадает с функцией плотности наведенного заряда

$$F_{1/2}(1/rm,\alpha)=\rho(mr,\alpha)=1+2\int\limits_1^\infty\frac{dt}{t}e^{-2mrt}\rho_{\text{ч.л}}(4t^2), \tag{5}$$

которая связана с пропагатором известной формулой

$$\rho(mr,\alpha)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{dk}{k}\sin kr\,d(k^2/m^2,\alpha), \tag{6}$$

здесь $k=|\vec{k}|, r=|\vec{r}|$. А при значении параметра $\nu=1$ функция (4) совпадает со спектральной функцией в представлении собственного времени [5,6,8]

$$d(x,\alpha)=x\int\limits_0^\infty ds\exp(-m^2sx)F_1(1/sm^2,\alpha), \tag{7}$$

где $x=k^2/m^2$.

Поправка к кулоновскому потенциалу точечного заряда порядка $\alpha(Z\alpha)$ была вычислена Юлингом [9], а порядка $\alpha^2(Z\alpha)$ Калланом и Сабри [10]. Пользуясь этими результатами можно, согласно (5), выписать функцию Челлена—Лемана в том же приближении ТВ. Асимптотическому значению пропагатора фотона при $k^2/m^2\to\infty$ соответствуют малые расстояния от центра и $sm^{2\nu}\to 0$. В этом случае интеграл (4) берется в явном виде и в результате получаем (везде ниже $Z=1$):

$$F_\nu(1/sm^{2\nu},\alpha)^{-1}=1+\frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{5}{9}-\frac{1}{3}\ln\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}\right)+$$
$$+\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2\left[\frac{5}{24}-\zeta(3)+\frac{\pi^2}{54}\left(2-\frac{1}{\nu^2}\right)-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}\right]+\ldots, \tag{8}$$

где $\zeta(3)=\sum\limits_{n=1}^\infty n^{-3}=1,202056\ldots$, $\ln\gamma=0,577215\ldots$ — постоянная Эйлера. Таким образом, на малых расстояниях от пробного заряда в рамках ТВ наша спектральная функция, аналогично другим инвариантным зарядам [8], разлагается в ряд по степеням константы связи и логарифма:

---

*) Применяется система единиц, в которой $\hbar=c=1$ и $\alpha=e^2/4\pi=1/137$; метрика $pk=\vec{p}\vec{k}-p_0k_0$.

$$F_\nu\left(\frac{1}{sm^{2\nu}},\alpha\right)^{-1}=1+\frac{\alpha}{\pi}\left(a_{10}+a_{11}\ln\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}\right)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n\sum_{k=0}^{n-1}a_{nk}^{(\nu)}\ln^k\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}} \qquad (9)$$

В частном случае $\nu=1/2$ разложение (8) совпадает с известным разложением для наведенного заряда ([11]).

3. Обычно в методе ренормгруппы ([1–4]) вводится новая константа взаимодействия

$$\alpha_\lambda=\alpha d(\lambda^2/m^2,\alpha), \qquad (10)$$

где α_λ изменяется между значением физической постоянной тонкой структуры α (при $\lambda\to 0$) и голым предельным зарядом α_0 ($\lambda\to\infty$). Соотношение инвариантности по ренормгруппе записывается в виде

$$\alpha_\lambda d(k^2/m^2,\lambda^2/m^2,\alpha_\lambda)=\alpha d(k^2/m^2,\alpha); \qquad (11)$$

здесь в левой части введена стандартная запись пропагатора, явно показывающая точку нормировки. Благодаря свойствам линейности и подобия преобразования (4) (аналогично свойствам обычного преобразования Лапласа—Карсона (7)) можно получить из (11) следующее соотношение инвариантности

$$\alpha_\lambda F_\nu(1/sm^{2\nu},1/s_\lambda m^{2\nu},\alpha_\lambda)=\alpha F_\nu(1/sm^{2\nu},\alpha). \qquad (12)$$

При этом дифференциальное уравнение Ли ренормгруппы, которое выводится с обычным условием, что теория имеет предел в асимптотике, когда массы стремятся к нулю, не изменяется

$$\lambda^2\frac{d\alpha_\lambda}{d\lambda^2}=\Psi(\alpha_\lambda). \qquad (13)$$

Проинтегрировав, получим уравнение ГМЛ в нашем представлении

$$\ln\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}=\int_{q(\alpha)}^{\alpha^*}\frac{dz}{\Psi(z)}, \qquad (14)$$

где нижний предел есть первый член асимптотического разложения по степеням логарифма при $sm^{2\nu}\to 0$:

$$\alpha F_\nu\left(\frac{1}{sm^{2\nu}},\alpha\right)=q(\alpha)+p(\alpha)\ln\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}+$$

$$+r(\alpha)\ln^2\frac{1}{m^2(s\gamma)^{1/\nu}}+\ldots. \qquad (15)$$

4. Пользуясь вычисленными нами членами ряда ТВ (8), можно получить коэффициенты разложения функции ГМЛ ([1]), с помощью функционального соотношения ([4]):

$$2\Psi(q(\alpha))=\alpha q'(\alpha)\beta(\alpha). \qquad (16)$$

Здесь

$$\beta(\alpha)=2\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n=\frac{2}{3}\frac{\alpha}{\pi}+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2-\frac{121}{144}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3+\dots \tag{17}$$

функция Каллана—Симанзика ([12]), которая универсальна при вычислениях в рамках КЭД, т. е. одна и та же для всех ренорм-инвариантных зарядов. Можно показать, что ренорм-инвариантный заряд αF_ν удовлетворяет уравнению Каллана—Симанзика:

$$\left[2\nu s\frac{\partial}{\partial s}+\alpha\beta(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\alpha F_\nu\,(1/sm^{2\nu},\alpha)=0. \tag{18}$$

Разложение в ряд левой и правой частей (18) дает

$$\psi_1=\beta_1=\frac{1}{3},\quad \psi_2=\beta_2=-\frac{1}{4},\quad \psi_3^{(\nu)}=\beta_3+\beta_2 a_{10}-\beta_1 a_{20}^{(\nu)}. \tag{19}$$

Таким образом разложение функций ГМЛ для различных ренорминвариантных зарядов, а также для различных значений ν заряда αF_ν, различаются начиная с третьего члена. Асимптотика различных инвариантных зарядов может отличаться только постоянными a_{n0}, так как коэффициенты при логарифмах в разложении (9) универсальны. Этот однопараметрический произвол по ренормгруппе, выливающийся в произвол функции ГМЛ, в нашей работе характеризуется параметром $\nu(0<\nu<\infty)$.

Подставляя в (19) значения a_{10} и a_{20} из (8), (9) и β_n из (17), получаем в результате

$$\psi_3^{(\nu)}=-\frac{101}{288}+\frac{\zeta(3)}{3}-\frac{\pi^2}{162}\left(2-\frac{1}{\nu^2}\right)=-0{,}071856\ldots+\frac{0{,}060923}{\nu^2}. \tag{20}$$

Итак $\psi_3^{(\nu)}$, как функция параметра ν, имеет вид гиперболы с асимптотиками—положительной полуосью и линией $\psi_3^{(\infty)}=-0{,}071856\ldots$ и пересекает ноль при $\nu_0=0{,}921\ldots$.

5. Следует заметить, что мы зафиксировали два интегральных преобразования (5) и (7), а экстраполирующее их интегральное преобразование можем выбрать произвольным образом, а именно вместо (4) взять

$$F^{\varphi(\nu)}(sm^{2\varphi(\nu)},\alpha)=1+\int_0^\infty\frac{d\zeta}{\zeta}\exp[-s(m^2\zeta)^{\varphi(\nu)}]\,\rho_{\nu}(\zeta) \tag{21}$$

с фиксированием двух точек: $\varphi(\nu_1)=1/2$, $\varphi(\nu_2)=1$ $(\nu_1\neq\nu_2)$.

Множество всех положительно-определенных функций $\varphi(\nu)$ заполняет квадрант, ограниченный снизу линией $\psi_3^{(\nu)}$ и слева осью ординат $\nu=0$.

6. Согласно результатам работ ([4,10]) для асимптотики пропагатора фотона при $k^2/m^2\to\infty$

$$\psi_3^{(d)} = \frac{\zeta(3)}{3} - \frac{101}{288} = 0{,}049991\ldots, \tag{22}$$

т. е. положительно, а т. к. и ψ_1, $\psi_2 > 0$, то это уменьшает надежды на существование нуля уравнения $\Psi(z) = 0$. Однако, полученные в ([8]) значения ψ_3, для асимптотики лагранжевой функции постоянного поля большой интенсивности $\psi_3^{(c)} = -0{,}079785\ldots$

и для константы перенормировки $\psi_3^{(z)} = -\frac{41}{288} - \frac{5}{36}\ln 2 = -0{,}238621\ldots$

отрицательны. Отрицательно значение ψ_3 и для представления собственного времени (7) пропагатора фотона

$$\psi_3^{(\nu-1)} = -\frac{101}{288} + \frac{\zeta(3)}{3} - \frac{\pi^2}{162} = -0{,}010932\ldots .$$

7. Итак, для введенного в настоящей работе, с помощью преобразования (4), инвариантного заряда αF_ν $(0 < \nu < \infty)$ коэффициент $\psi_3^{(\nu)}$ в разложении (1) можно варьировать изменением параметра преобразования ν. Важно то, что в определенном интервале изменения параметра вышеуказанный коэффициент отрицателен, и это намекает на существование нуля функции Гелл—Манна—Лоу при некотором значении переменной константы связи z. Следует отметить, что коэффициент $\psi_3^{(\nu)}$, ни при каких допустимых значениях параметра ν не принимает отрицательных сколь угодно больших по абсолютной величине значений, а именно он ограничен снизу значением $\psi_3^{(\nu)} = -0{,}071856\ldots$. В то же время при $\nu \to 0$ коэффициент стремится к плюс бесконечности. Этот факт говорит о том, что есть некоторые ограничения на решения уравнения $\Psi(z) = 0$, которые нам в настоящее время неизвестны и которые чрезвычайно трудно получить оставаясь в рамках ТВ, хотя есть попытки продвинуться вперед с помощью анализа асимптотики диаграмм Фейнмана в бесконечном порядке для некоторых моделей теории поля ([13]). То, что изменением определенного параметра интегрального преобразования можно варьировать значение коэффициентов разложения функции Гелл—Манна—Лоу, позволяет надеяться, что изменением способа обрезания можно подойти к доказательству существования нуля (или нулей) функции Гелл—Манна—Лоу. Это поможет ответить на вопросы замкнутости как чистой КЭД, так и других теорий квантованных полей.

Автор выражает благодарность В. И. Ритусу за постановку задачи и обсуждения.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Վ. Օ. ՊԱՊԱՆՅԱՆ

Սեփական ժամանակի ընդհանրացված պատկերացումը քվանտային էլեկտրադինամիկայում փոքր հեռավորությունների համար

Սեփական ժամանակի ընդհանրացված պատկերացման մեջ ստացված են կետային լիցքի պոտենցիալի ուղղումները, հաշվված գրգռումների տեսությամբ։ Ստացված են պատկերացման մեջ ինվարիանտ լիցքին համապատասխանող Գելլ-Մանն-Լոուի ֆունկցիայի վերլուծության առաջին երեք անդամները, և ցույց է տրված, որ երրորդ անդամի գործակիցը կարող է լինել բացասական, չնայած և սահմանափակված ներքևից։ Այսպիսով, սեփական ժամանակի պատկերացումը կարող է օգտակար լինել Գելլ-Մանն-Լոուի ֆունկցիայի զրոյի գոյությունը ապացուցելու համար, որոնք անհրաժեշտ են քվանտային էլեկտրադինամիկայի ներքին անհակասության համար։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. Gell—Mann F. E. Low* Phys. Rev., 95, 1300(1954). [2] *M. Baker, K. Johnson*, Phys. Rev., 183, 1292, 1969; D3, 2516 (1971); D3, 2541 (1971). [3] *K. Wilson* Phys. Rev., D3, 1818 (1971). [4] *S. Adler* Phys. Rev., D5, 3021 (1972). [5] *В. И. Ритус* ЖЭТФ, 69, 1517 (1975). [6] *В. И. Ритус* ЖЭТФ, 73, 807 (1977). [7] *G. Kallen* Helv. Phys. Acta, 25, 417 (1952); *H. Lehman* Nuov. Cim., 11, 342 (1954). [8] В. О. Папанян Препринт № 76—43 ИФИ АН Арм. ССР (1976). [9] *E. A. Uehling* Phys. Rev., 48, 55 (1935). [10] *G. Kallen, A. Sabry*. Kgl. Dan. Vid. Selsk., 29, 17 (1955). [11] *J. Blomgvist* Nucl. Phys., B48, 95, (1972). [12] *C. Callan*, Jr. Phys. Rev., D2, 1541 (1970); *K. Symanzik*. Comm. math. Phys., 18, 227 (1970); 23, 49 (1971). [13] *C. M. Bender*, T. T. Wu. Phys. Rev. Lett., 37, 117 (1976).