ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 1

УДК 539.376

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. А. Енгибарян

О плоской контактной задаче нелинейной установившейся ползучести с учетом сил сцепления

(Представлено академиком АН Армянской ССР Н. Х. Арутюняном 4/III 1978)

В работе ([1]) впервые поставлена и исследована плоская контактная задача нелинейной неустановившейся теории ползучести без учета сил трения и сцепления. При этом в качестве основного физического закона принималась предложенная в ([2]) степенная зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций, обобщенная по теории ползучести для наследственно стареющих тел ([3]). В этой же работе ([1]) сформулирован обобщенный принцип суперпозиции для перемещений, позволяющий решение исходной контактной задачи свести к последовательному решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода с симметричным степенным ядром и интегрального уравнения Вольтерра. В работе ([4]) рассмотрена плоская контактная задача нелинейной установившейся теории ползучести с учетом сил трения. Укажем также на работу ([5]), где дано решение контактной задачи о вдавливании клиновидного штампа в нелинейно-деформируемую по степенному закону полуплоскость.

Отметим, что достаточно полная библиография основных работ и результатов по контактным задачам теории ползучести содержится в ([6]).

В настоящей статье обсуждается плоская контактная задача нелинейной теории установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и скоростями деформаций. В рамках предложенной здесь модели, эта контактная задача описывается интегральным уравнением Фредгольма первого рода с эрмитовым положительно определенным ядром. Указанная модель основывается на обобщенном принципе суперпозиции перемещений, который проводится как для вертикальных, так и для горизонтальных перемещений граничных точек. При этом, ввиду знакопеременности некоторых компонент перемещений, этот принцип проводится для их абсолютных величин. Но в конечном итоге это свойство истинных перемещений отражается в выражениях соответствующих компонент обобщенных перемещений.

Замкнутое решение основного интегрального уравнения построено тремя аналитическими методами—М. Г. Крейна ([7]), ортогональных многочленов ([8]) и Копсона ([8]).

В частных случаях получается известное решение М. Садовского ([9]), а также Н. Х. Арутюняна и М. М. Манукяна ([4]).

Предварительно несколько подробно излагается решение задачи о равновесии полуплоскости под действием только горизонтальной сосредоточенной силы, приложенной на ее границе.

1. Пусть имеется полуплоскость, для материала которой между интенсивностями напряжений и скоростей деформаций существует степенная зависимость вида:

$$\sigma_i=K_0\varepsilon_i^{\mu}\left(0<\mu<1\right),\left(K_0=\frac{1}{A^{\mu}},\ \mu=\frac{1}{m}\right), \tag{1.1}$$

где K_0—определенная физическая константа, μ— показатель ползучести, а σ_i и ε_i— интенсивности напряжений и скоростей деформаций, выражающиеся соответственно формулами:

$$\sigma_i=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_r-\sigma_\theta)^2+(\sigma_r-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_\theta)^2+6\tau_{r\theta}}, \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_i=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_r)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_\theta)^2+6\gamma_{r\theta}}, \tag{1.3}$$

Пусть, далее, на границе полуплоскости действует горизонтальная сосредоточенная сила Q. Требуется определить компоненты смещений, исчезающие на бесконечности. Поместим начало цилиндрической системы координат r,θ,z в точке приложения сосредоточенной силы Q к полуплоскости и направим оси r,θ,z как показано на рис. 1.

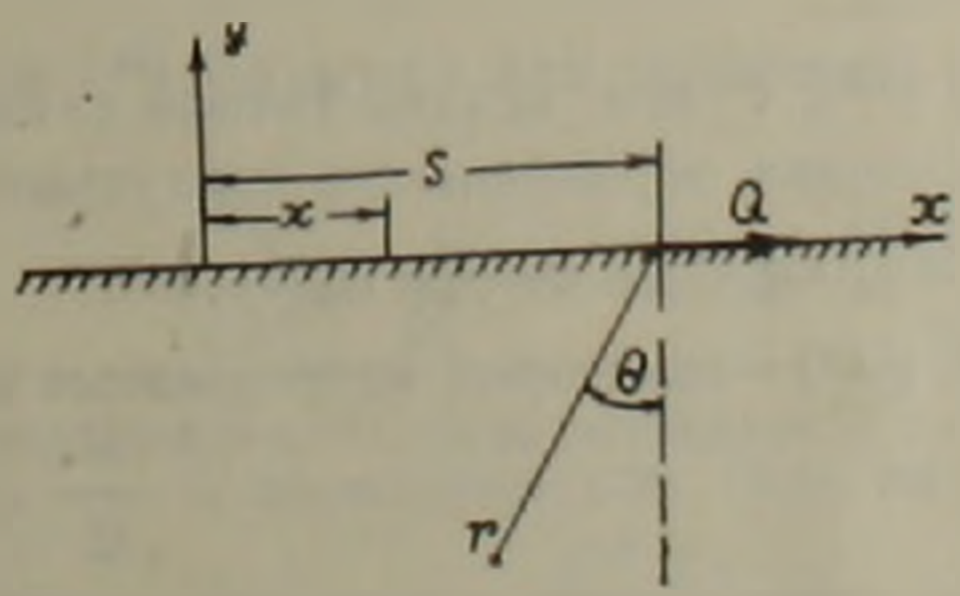

Рис. 1

Согласно нелинейной теории установившейся ползучести, в случае плоской деформации имеем ([4]):

$$\varepsilon_r=\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_r-\sigma\right),\quad \varepsilon_\theta=\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_\theta-\sigma\right),\quad \varepsilon_z=0,\quad \gamma_{r\theta}=\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\tau_{r\theta}$$

$$\sigma=\frac{1}{2}\left(\sigma_r+\sigma_\theta\right) \tag{1.4}$$

Эти уравнения выведены в предположении несжимаемости материала

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0. \tag{1.5}$$

Уравнения равновесия будут:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\sigma_r\right) + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \sigma_\theta = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} = 0 \tag{1.6}$$

Зависимости между компонентами скорости деформаций и компонентами вектора скорости смещений следующие:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \ 2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{1.7}$$

Дифференциальное уравнение неразрывности деформаций имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r^2\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - z\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - 2r\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - 2\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0. \tag{1.8}$$

Граничными условиями задачи будут

$$\sigma_\theta = 0, \tau_{r\theta} = Q\delta(r) \ \text{при} \ \theta = \pm\frac{\pi}{2}\left(0 < r < \infty\right), \tag{1.9}$$

где $\delta(r)$—дельта—функция Дирака. При этом заметим, что из условия равновесия любого элемента в виде полукруга с центром в начале координат, высеченного из полуплоскости, вытекает соотношение

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\sigma_r \sin\theta d\theta = Q. \tag{1.10}$$

Следуя работам [1,4], будем искать точное решение в перемещениях методом разделения переменных в следующей форме.

$$u = f_1(r)\chi_1(\theta), \quad v = f_2(r)\chi_2(\theta), \tag{1.11}$$

здесь $f_1(r)$, $f_2(r)$, $\chi_1(\theta)$, $\chi_2(\theta)$—некоторые непрерывные функции, подлежащие определению во всей полуплоскости $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $r > 0$.

С учетом предыдущих соотношений и того, что $\tau_{r\theta} = 0$ во всей полуплоскости и введя следующие обозначения

$$cf_1(r) = F(r), \quad \chi_2(\theta) = \chi(\theta) \tag{1.12}$$

получим дифференциальные уравнения для определения функций $F(r)$ и $\chi(\theta)$: $r^2F''(r) + rF'(r) - (1-\lambda^2)F(r) = 0, \quad \chi''(\theta) + \lambda^2\chi(\theta) = 0.$ (1.13)

Принимая во внимание, что при $r \to \infty$ перемещения должны исчезать, получим

$$u = \lambda(D_4 \cos\lambda\theta - D_3 \sin\lambda\theta)r^{-\sqrt{1-\lambda^2}}$$

$$v=\left(\sqrt{1-\lambda^2}-1\right)\left(D_4\sin\lambda\theta+D_3\cos\lambda\theta\right)r^{-\sqrt{1-\lambda^2}} \tag{1.14}$$

Далее заметим, что из нечетности σ_r следует:

$$\sigma_r=0 \text{ при } \theta=0 \tag{1.15}$$

Удовлетворяя граничным условиям, закону ползучести, уравнениям равновесия и пользуясь соотношениями (1.10), (1.14), (1.15), получим:

$$\sqrt{1-\lambda^2}=\frac{1}{\mu}-1, \sigma_3=0, D_4=0, D_3=\frac{Q^m}{K_0^m\nu(m-1)I^m(\mu)}.$$

где

$$I(\mu)=4\int_0^{\pi/2}(\sin\lambda\theta)^\mu\sin\theta d\theta, \tag{1.16}$$

В конечном итоге перемещения граничных точек полуплоскости будут даваться формулами:

$$[u]_{\theta=-\pi/2}=-[u]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{Q^m\sin\frac{\lambda\pi}{2}}{K_0^m(m-1)I^m(\mu)}r^{1-m},$$

$$[v]_{\theta=-\pi/2}=[v]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{(m-2)Q^m\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{K_0^m(m-1)I^m(\mu)}r^{1-m} \tag{1.17}$$

В частном случае $K_0=\frac{2}{3}E$ и $\lambda^2=\mu=1$ получаются известные из теории упругости [10] формулы для компонент напряжений и перемещений:

$$u=\frac{3}{2\pi E}\ln\frac{1}{|r|}, \ v=0, \ \sigma_r=\frac{2Q\sin\theta}{\pi r}.$$

В случае вертикальной сосредоточенной силы [1]

$$[u]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=[u]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}=\frac{P^m\cos\frac{\lambda\pi}{2}}{K_0^m(m-1)J^m(\mu)}r^{1-m},$$

$$[v]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}=-[v]_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\frac{(2-m)P^m\sin\frac{\lambda\pi}{2}}{K_0^m(m-1)\lambda J^m(\mu)}r^{1-m}, \tag{1.18}$$

где

$$J(\mu)=4\int_0^{\pi/2}(\cos\lambda\theta)^\mu\cos\theta d\theta. \tag{1.19}$$

2. Пусть штамп, основание которого описывается функцией $y=f(x)$, под действием вертикальной силы P, приложенной в центре штампа, вдавливается в деформируемую по закону (1.1) полуплоскость. Предполагается, что штамп сцеплен с основанием. Требуется определить законы распределения нормальных $p(x)$ и тангенциальных $q(x)$ контактных напряжений. Участок контакта берется в виде отрезка $[-a,a]$. В указанной постановке рассматриваемая задача формулируется в виде граничных условий для полуплоскости

$$v=\delta-f(x),\ u=0 \quad \text{при } |x|<a,$$
$$\sigma_y=\tau_{xy}=0 \quad \text{при } |x|>a, \tag{2.1}$$

где δ — мера погружения штампа в основание.

Используя обобщенный принцип суперпозиции перемещений, решение задачи сводится к решению следующего интегрального уравнения Фредгольма первого рода с эрмитовым ядром:

$$\int_{-a}^{a} \frac{1-i\nu\,\mathrm{sgn}(x-s)}{|x-s|^h}\,\chi(s)\mathrm{d}s=F(x),\quad |\nu|<\mathrm{tg}\,\frac{\pi h}{2},$$

где

$$0<h<1, \chi(s)=p(s)-i\,\frac{J(\mu)}{I(\mu)}\,q(s),\ 1-\mu=h,\ \nu=\left(\mathrm{ctg}\frac{\lambda\pi}{2}\right)^{1-h} \tag{2.2}$$

Решение интегрального уравнения (2.2) должно удовлетворять соотношению

$$\int_{-a}^{a} p(s)\mathrm{d}s=P,$$

которое вытекает из условия равновесия штампа.

3. Решение этого уравнения построим методом М. Г. Крейна. По этому методу единственное решение уравнения при непрерывной правой части $F(x)$ имеет вид:

$$\chi(x)=\left[\frac{1}{M'(u)}\,\frac{d}{\mathrm{du}}\int_{-a}^{u} g^*(s,u)F(s)\mathrm{d}s\right]_{u=a} g(x,a)-$$
$$-\int_{x}^{a} g(x,u)\,\frac{d}{\mathrm{du}}\left[\frac{1}{M'(u)}\,\frac{d}{\mathrm{du}}\int_{-a}^{u} g^*(s,u)F(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{du} \tag{3.1}$$

где $g(x,u)$ и $g^*(x,u)$ решения уравнений

$$\int_{-a}^{u} K(x,s)g(s,u)\mathrm{d}s=1 \tag{3.2}$$

$$\int_{-a}^{u} K(s,x)g^*(s,u)\mathrm{d}s=1, \tag{3.3}$$

а
$$M(u)=\int_{-a}^{u} g(s,u)\,ds. \tag{3.4}$$

Решения этих уравнений согласно ([11]) имеют вид:

$$g(x,u)=\frac{c_\nu}{\pi}\,(u-x)^{\alpha+i\beta}\,(a+x)^{\alpha-i\beta},$$

$$g^{*}(x,u)=\frac{c_\nu}{\pi}\,(u-x)^{\alpha-i\beta}\,(a+x)^{\alpha+i\beta}, \tag{3.5}$$

где

$$c_\nu=\frac{\sin\pi h}{2\sqrt{\sin^2\frac{\lambda\pi}{2}-\nu^2\cos^2\frac{\lambda\pi}{2}}},\quad \alpha+i\beta=-\frac{1}{\pi}\arcsin\left|(1+i\nu)c_\nu\right|.$$

Решение уравнения (2.2) можно построить также методом аппарата ортогональных многочленов Якоби. Согласно ([8]), решение (2.2) получим в виде:

$$\varphi(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n\sin\pi h\, n!}{B\pi(1-i\nu)(h)_n}\cdot\frac{P_n^{\alpha-1,h-\alpha}(1-2\xi)}{\xi^{1-\alpha}(1-\xi)^{\alpha-h}}, \tag{3.6}$$

где

$$B=\sqrt{1-2\cos\pi h\, b_{*}+b_{*}^2}\qquad b_{*}=(1+i\nu)(1-i\nu)^{-1},$$

$$\alpha=\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{\sin\pi h}{B}.$$

При этом выбирается та однозначная ветвь арксинуса, для которой $0<\mathrm{Re}\,\alpha<1$.

Дадим, наконец, решение уравнения (2.2) методом Копсона, состоящим в сведении исходного уравнения Фредгольма к двум повторным интегральным уравнениям Вольтерра.

Используя известные формулы обращения операторов Абеля, согласно ([8]) решение (2.2) получим в виде:

$$\chi(x)=-\frac{N}{(x+a)^{1-\alpha}}\frac{d}{dx}\int_{x+a}^{2a}\frac{y^{1-h}dy}{(x+a-y)^{\alpha-h}}\frac{d}{dy}\int_{0}^{y}\frac{F(t-a)t^{h-\alpha}}{(y-t)^{1-\alpha}}\,dt, \tag{3.7}$$

где

$$N=\frac{\sin\pi\alpha\cdot\Gamma(h)\cdot(1-i\nu)^{-1}}{\pi\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha+h)}.$$

В случае штампа с плоским основанием $f(x)=0$ находим следующие выражения для нормальных и тангенциальных контактных напряжений:

$$p(x)=\frac{P}{D}(a^2-x^2)^{\alpha}\cos\left(\beta\cdot\ln\frac{a+x}{a-x}\right),$$

$$q(x)=\frac{I(\mu)}{J(\mu)}\cdot\frac{P}{D}\cdot(a^2-x^2)^{\alpha}\sin\left(\beta\cdot\ln\frac{a-x}{a+x}\right). \tag{3.8}$$

где

$$D=\frac{(2a)^{2\alpha+1}\Gamma(\alpha+1+i\beta)\Gamma(\alpha+1-i\beta)}{(2\alpha+1)\Gamma(2\alpha+1)},$$

При $\mu=1$ формулы (3.8) принимают вид:

$$p(x)=\frac{P}{\pi\sqrt{a^2-x^2}},\quad q(x)=0$$

что совпадает с известной формулой, полученной М. Садовским ([9]) для случая отсутствия сил трения.

Автор выражает свою признательность Н. Х. Арутюняну и С. М. Мхитаряну за постановку задачи и обсуждение работы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Ա. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ

Հաստատված սողքի ոչ գծային տեսության հարթ կոնտակտային մի խնդրի մասին հարակցման ուժերի հաշվառումով

Աշխատանքում քննարկվում է հաստատված սողքի ոչ գծային տեսության հարթ կոնտակտային խնդիրը հարակցման ուժերի հաշվառումով։ Ելնելով տեղափոխությունների վերադրման ընդհանրացված սկզբունքից, խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպվում է դրականորեն որոշյալ էրմիտյան կորիզով Ֆրեդհոլմի առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարման տեսքով։ Կառուցված է այդ ինտեգրալ հավասարման միակ լուծումը Կրեյնի, օրթոգոնալ բազմանդամների և Կոպսոնի անալիտիկ մեթոդներով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Х. Арутюнян*, ПММ, т. 23. вып. 5 (1959). [2] *Ю. Н. Работнов*, Вестник МГУ, № 10, 1948. [3] *Н. Х. Арутюнян*, Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952. [4] *Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян*, ПММ, т. 27, вып. 5 (1963). [5] *Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян*, ПММ, т. 26, вып. 1 (1962). [6] Развитие теории контактных задач в СССР, «Наука», М., 1976. [7] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, «Наука», 1967. [8] *Г. Я. Попов*, ПММ, т. 31, вып. 2, (1967). [9] *Н. И. Мусхелишвили*, Некоторые основные задачи математической теории упругости. «Наука», М., 1966. [10] *А. М. Кац*, Теория упругости. Гостехиздат, 1956. [11] *С. М. Мхитарян*, ДАН Арм. ССР, т. 48, № 2 (1969).