УДК 539.3

МЕХАНИКА

А. Г. Галоян

О поперечных колебаниях пластинок, изготовленных из разномодульного материала

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 6/II 1978)

Исходя из уравнения цилиндрического изгиба пластинок, изготовленных из разномодульного материала, после необходимых упрощений, получено уравнение поперечных колебаний. Решены конкретные примеры с различными краевыми условиями. Определены частоты свободных колебаний, с доведением их до числовых результатов. Показано, что частоты свободных колебаний зависят от степени разномодульности материала и эта зависимость, в основном, выражается жесткостью пластинки.

В работе (1), посвященной цилиндрическому изгибу пластинок, изготовленных из разномодульного материала, выявлено, что нахождение прогибов в конечном счете сводится к решению уравнений

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M \pm \gamma_1^2 \frac{|Q|h}{4} (1 - 2\nu^+ \nu^-) - \frac{3qD}{20G_0 h} [8 - \eta^2 (1 - 2\nu^+ \nu^-)] \quad (1)$$

с соответствующим знаком перед вторым членом правой части, зависящим от знака произведения изгибающего момента и перерезывающей силы ($M \cdot Q$).

Здесь

$$D = \frac{h^3}{3} [\sqrt{a_{22}(1 - \nu_-^2)} + \sqrt{a_{11}(1 - \nu_+^2)}]^{-2}, \quad (2)$$

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{a_{22}(1 - \nu_-^2)} - \sqrt{a_{11}(1 - \nu_+^2)}}{\sqrt{a_{22}(1 - \nu_-^2)} + \sqrt{a_{11}(1 - \nu_+^2)}},$$

$$\frac{1}{G_0} = a_{11} + a_{22} - 2a_{12}, \quad a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-}.$$

Решение ряда конкретных примеров по изгибу показывает, что второй член правой части уравнения (1) дает незначительную поправку (порядка одного процента) на величину максимального прогиба.

Учитывая также, что именно этот член существенно осложняет ход решения конкретных примеров им будем пренебрегать.

Исходя из сказанного выше, уравнение (1) заменим следующим

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = -M - \frac{3qD}{20G_0 h} [8 - \nu^2 (1 - 2\nu^+ \nu^-)], \quad (3)$$

которое дает возможность перейти к вопросу о поперечных колебаниях пластинок, изготовленных из разномодульного материала. Следует отметить, что здесь пока нет возможности ставить вопрос о поперечных колебаниях в общей постановке, так как даже уравнения поперечного изгиба пластинок в общей постановке не имеется. Поэтому здесь вопрос ставится в том смысле, что при колебаниях сохраняется цилиндрическая форма изгиба пластинки.

Для получения уравнения колебаний пластинки с использованием упрощенного уравнения изгиба (3), поступим аналогично работе (2). А именно, продифференцируем обе части уравнения (3) по x и пользуясь известными связями между силовыми факторами

$$\frac{dM}{dx} = Q, \quad \frac{dQ}{dx} = -q \quad (4)$$

представим его в виде

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = q - \frac{3D}{20G_0 h} [8 - \nu^2 (1 - 2\nu^+ \nu^-)] \frac{d^2 q}{dx^2}, \quad (5)$$

Далее в уравнении (5) заменив q нормальной составляющей сил инерции, приходящейся на единицу площади пластинки

$$q = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (6)$$

при пренебрежении влиянием тангенциальных составляющих сил инерции, и учитывая, что $w = w(x, t)$, получим уравнение свободных колебаний ненагруженной пластинки

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{3\rho D}{20G_0} [8 - \nu^2 (1 - 2\nu^+ \nu^-)] \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2}, \quad (7)$$

где ρ — плотность материала пластинки.

В уравнении (7) принимая

$$w(x, t) = W(x) \cos \omega t \quad (8)$$

относительно $W(x)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$W^{IV} + \frac{k_0 h}{D} \omega^2 W'' - \frac{\rho h}{D} \omega^4 W = 0, \quad (9)$$

где

$$k_0 = \frac{3\rho D}{20G_0 h} [8 - \nu^2(1 - \nu + \nu^2)]. \quad (10)$$

Общее решение уравнения (9) имеет вид:

$$W(x) = C_1 \operatorname{ch} \alpha_0 x + C_2 \operatorname{sh} \alpha_0 x + C_3 \cos \beta_0 x + C_4 \sin \beta_0 x, \quad (11)$$

где

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{array} \right\} = \left[\sqrt{\left(\frac{k_0 h}{2D} \omega^2 \right)^2 + \frac{\rho h}{D} \omega^2} \mp \frac{k_0 h}{2D} \omega^2 \right]^{1/2}, \quad (12)$$

а C_i — постоянные интегрирования.

При решении конкретных примеров необходимо иметь также выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы, которые в принятых обозначениях имеют вид:

$$M = -D \left(W'' + \frac{k_0 h}{D} \omega^2 W \right) \cos \omega t, \quad (13)$$

$$Q = -D \left(W''' + \frac{k_0 h}{D} \omega^2 W' \right) \cos \omega t.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

а) Для бесконечной полосы шириной l , шарнирно опертой по длинным сторонам, граничные условия будут

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=l \quad W=0, \quad M=0 \quad (14)$$

Удовлетворяя граничным условиям (14), относительно C_i получим систему однородных уравнений. Приравняв нулю определитель этой системы, получим

$$\sin \beta = 0, \quad \beta = \pi n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (15)$$

Откуда, с учетом (12) для собственных частот свободных колебаний рассматриваемой пластинки, колеблющейся с сохранением цилиндрической формы изгиба, получим

$$\omega_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \left[\frac{\rho h}{D} (1 + k \pi^2 n^2) \right]^{-1/2}. \quad (16)$$

Здесь и в дальнейшем

$$\alpha = \alpha_0 l, \quad \beta = \beta_0 l, \quad k = \frac{k_0}{\rho l^2} = \frac{3D}{20 G_0 h l^2} [8 - \nu^2(1 - 2\nu + \nu^2)]. \quad (17)$$

б) В случае бесконечной полосы, с одной заземленной, а другой — свободной сторонами, имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x=0 \quad M=0, \quad Q=0 \quad (18)$$

$$\text{при } x=l \quad W=0, \quad W'=0$$

После удовлетворения граничным условиям (18) и приравнивания нулю определителя получаемой системы однородных уравнений, приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$2\operatorname{ch} \alpha \cos \beta + \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \operatorname{sh} \alpha \sin \beta + \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} = 0. \quad (19)$$

Следует отметить, что между α и β существуют следующие, вытекающие из (12), зависимости:

$$\alpha^2 \beta^2 = \frac{\rho h l^4}{D} \omega^2, \quad \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1 + k \beta^2}}. \quad (20)$$

Частоты собственных колебаний определяются через корни уравнения (19) следующим образом:

$$\omega_n = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{\beta_n^2}{\sqrt{1 + k \beta_n^2}}, \quad (21)$$

где β_n — n -ый корень уравнения (19).

в) В случае бесконечной полосы, с одной заземленной, а другой — шарнирно опертой сторонами, имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x=0, \quad W=0, \quad W'=0 \quad (22)$$

$$\text{при } x=l, \quad W=0, \quad M=0$$

Здесь определение частот собственных колебаний сводится к нахождению корней следующего трансцендентного уравнения

$$\alpha \operatorname{tg} \beta - \beta \operatorname{th} \alpha = 0, \quad (23)$$

В этом случае частоты собственных колебаний определяются по формуле (21), где под β_n понимается n -ый корень уравнения (23).

г) Имеем бесконечную полосу с двумя заземленными сторонами в предположении, что одно из них свободно может перемещаться по направлению x , исключая возможность появления продольной силы в этом направлении.

В этом случае граничные условия будут:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=l \quad W=0, \quad W'=0, \quad (24)$$

а соответствующее трансцендентное уравнение получается в виде

$$2\operatorname{ch} \alpha \cos \beta + \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta} \right) \operatorname{sh} \alpha \sin \beta - 2 = 0. \quad (25)$$

Здесь также частоты собственных колебаний определяются по формуле (21), где β_n — n -ый корень уравнения (25).

В последних трех примерах корни уравнений (19), (23), и (25) зависят от параметра k (17), характеризующего влияние поперечных сдвигов. Этот параметр кроме отношения h^2/l^2 зависит также и от степени разномодульности (отношения E^+/E^-) материала. Однако за-

висимость от последнего, как и в случае балки (2), весьма слабая, так как при изменении отношения E^+/E^- в достаточно большом интервале (1÷10) параметр k изменяется в пределах (0,24÷0,26) h^2/l^2 . Поэтому, если дальнейшее вычисление произвести при $h/l=1/5$, то можно принимать $k=0,01$.

В таблице приведены значения первых пяти корней уравнений (19), (23) и (25), а также соответствующие им величины

$$\omega_n^0 = l^2 \sqrt{\frac{gh}{D}} \omega_n$$

n	б		в		г	
	β_n	ω_n^0	β_n	ω_n^0	β_n	ω_n^0
1	1,8958	3,5313	3,9628	14,5993	4,8430	21,1090
2	4,7883	20,6796	7,1716	41,7948	8,1000	50,9832
3	8,1080	51,0638	10,3892	74,8518	11,4015	85,7164
4	11,3990	85,6897	13,6024	109,5949	14,6821	121,3479
5	14,6833	121,3615	16,8061	114,4271	17,9735	158,0929

Из приведенного выше нетрудно заметить, что степень разномодульности весьма мало влияет на величину корней рассмотренных трансцендентных уравнений. Однако частоты собственных колебаний безусловно зависят от степени разномодульности материала и эта зависимость характеризуется величиной жесткости D .

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

ՈՒՆՆԵՐԻ ՊԱՆՈՑՈՒՆ

Տարամոդուլ նյութից պատրաստված սալերի լինդայնական տատանումների մասին

Ելնելով տարամոդուլ նյութից պատրաստված սալերի գլանային ծովան հավասարումներից և որոշ պարզեցումներ հաշվի առնելուց հետո, ստացված է շեղումով սալի ազատ տատանումները բնութագրող հավասարումը: Դիտարկված են տարբեր եզրային պայմանների դեպքեր, բերված են սեփական տատանումների հաճախականության համապատասխան արտահայտությունները, որոնք արտահայտվում են համապատասխան տրանսցենդենտ հավասարման արմատների միջոցով: Ցույց է տրված, որ նյութի տարամոդուլության ազդեցությունը սեփական տատանումների հաճախականության վրա հիմնականում բնորոշվում է սալի կոշտությունը բնութագրող արտահայտության միջոցով:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ А. Г. Галоян, Ученые записки ЕГУ, 3 (1977). ² А. Г. Галоян, А. А. Хачатрян, ДАН Арм. ССР, т. LXIII, № 3, (1978).