ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 1

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

А. А. Аракелян

Минимальные двусторонние идеалы в частичной полугруппе гомоморфизмов релятивов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 14/VI 1978)

Пусть A множество элементов произвольной природы. Через 2^A обозначим множество всех подмножеств множества A, (B, ρ), где $B \in 2^A$ $\rho \subset B \times B$ релятив [1]. Положим $\mathcal{A} = \{(B, \rho) | B \in 2^A,\ \rho$—нерефлексивное бинарное отношение$\}$, $\Psi(\mathcal{A})$ равным множеству всех гомоморфизмов между релятивами из $\mathcal{A}$. Через $\circ$ обозначим операцию суперпозиции в $\Psi(\mathcal{A})$. Тогда очевидно, что $\Psi(\mathcal{A})$ будет частичной полугруппой относительно суперпозиции.

Определение 1. Подмножество $V_\rho \subset B$ называется решением релятива (B, ρ), если

(а) $(a, b) \overline{\in} \rho$ для любых $a, b \in V_\rho$,

(б) для любого $b \overline{\in} V_\rho$ существует такой $a \in V_\rho$, что $(a, b) \in \rho$.

Положим $\Psi'(B)$ равным такому множеству гомоморфизмов из $\Psi(\mathcal{A})$, которые удовлетворяют следующему условию: если φ гомоморфизм между (B, ρ) и (B, σ), то (а) для любого $b \in V_\sigma$ существует такой $a \in V_\rho$, что $(a, b) \in \varphi$, (б) $V_\sigma \supset \varphi(V_\rho)$.

Из определения $\Psi'(B)$ следует, что $\Psi'(B)$ частичная полугруппа относительно операции суперпозиции. Через $K(\Psi'(B))$ обозначим множество гомоморфизмов, удовлетворяющих следующему условию: если ψ гомоморфизм из (B, ρ) в (B, σ), то $\psi = V_\rho \times V_\sigma \cup (B - V_\rho)(B - V_\sigma)$, где V_ρ, V_σ соответственно решения (B, ρ), (C, σ). Очевидно, что $K(\Psi'(B)) \subset \Psi'(B)$. Нетрудно доказать, что $K(\Psi'(B))$ двусторонний идеал $\Psi'(B)$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. $K(\Psi'(B))$—*минимальный двусторонний ненулевой идеал частичной полугруппы* $\Psi'(B)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in K(\Psi'(B))$—гомоморфизм из (B, ρ) в (B, σ) и $\Phi \subset \Psi'(B)$ некоторый двусторонний идеал $\Psi'(B)$, отличный от $K(\Psi'(B))$. Тогда гомоморфизм $\varphi = \varphi_6 \circ \varphi_3 \circ \varphi_1 \circ \varphi_0 \circ \varphi_2 \circ \varphi_4 \circ \varphi_5$, где $\varphi_i \in \Psi'(B)$ гомоморфизмы соответственно из (B, γ) в (B, σ), из (B, δ) в (B, λ), из (B, μ) в (B, γ), из (B, λ) в (B, τ), из (B, ν) в (B, μ), из (B, ρ) и (B, ν), из (B, τ) в (B, σ) будет принадлежать Φ. Отсюда $\Phi \supset K(\Psi'(B)$. Теорема доказана.

Определение 2. Пара (B, ρ) называется топологическим релятивом ([2]), если она наделена структурой релятива и топологией, удовлетворяющей аксиоме: для любой пары $(x, y) \in \rho$ существуют такие окрестности U_x и V_y точек x и y, соответственно, что $U_x \times V_y \subset \rho$.

Пусть A_1—метрическое пространство с метрикой θ. через $(2^{A_1})_m$, согласно ([3]) обозначим множество всех замкнутых ограниченных подмножеств A_1. Тогда

$$\Theta(B, C) = \max \{ \sup_{x \in B} \theta(x, C), \sup_{y \in C} \theta(B, y) \}, \tag{1}$$

где $B, C \in (2^{A_1})_m$ будет метрикой в $(2^{A_1})_m$.

Пусть далее (B, ρ), где $B \in (2^{A_1})_m$ топологический релятив. Релятив $(B, \bar{\rho})$, где $\bar{\rho}$—замыкание ρ будем называть замыканием релятива (B, ρ). Если положить $\theta^1((x, y), (x', y')) = \max\{\theta(x, x'), \theta(y, y')\}$, то θ^1 будет метрикой в $A \times A$.

Если пространство A_1 компактное в смысле метрики θ, то согласно ([4]) пространство $(2^{A_1})_m$ так же компактное в смысле метрики Θ. Положим

$A_1 = \{(B, \rho) | B \in (2^{A_1})_m, \rho$—нерефлексивное бинарное отношение$\}$

Если положить

$$\Theta^1((B, \bar{\rho}), (C, \bar{\sigma})) = \max \{\Theta(B, C), \Theta(\bar{\rho}, \bar{\sigma})\}, \tag{2}$$

то получим метрику в A_1.

Отсюда и из ([4]) следует, что A_1 компактное в смысле метрики Θ^1

Маурером ([5]) рассматривается сходимость последовательности релятивов, определенная следующим образом: последовательность релятивов $\{(A, \rho_n)\}_{n=1,2\ldots}$ сходится к релятиву (A, ρ), если для любого $a \in A$ существует такое $N(a)$, что $\rho_n(a) = \rho(a)$ для любого $n > N(a)$. Можно показать, что из сходимости в смысле метрики Θ^1 не следует сходимость в смысле Маурера.

Определение 3. Отображение φ топологического релятива (B, ρ) в топологический релятив (C, σ) называется гомоморфным, если $\sigma \supset \varphi \square \varphi(\rho)$ и φ непрерывное отображение.

Лемма 1. Если (B, ρ) топологический релятив, то $\rho(A')$ открыто для любого $A' \subset A$.

Через $\Psi(A_1)$ обозначим множество всех гомоморфизмов между релятивами A_1.

Определение 4. Подмножество $\Psi' \subset \Psi(A_1)$ назовем равностепенно непрерывным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$ что $\theta(a', a'') < \delta(\varepsilon)$ влечет $\theta(\psi(a'), \psi(a'')) < \varepsilon$ для любого $\psi \in \Psi'$.

Если для $\psi_1, \psi_2 \in \Psi(A_1)$ положить

$$\theta^2(\psi_1, \psi_2) = \sup_{a \in A_1} \theta(\psi_1(a), \psi_2(a)), \tag{3}$$

то согласно ([3]) θ^2 будет метрикой в $\Psi(A_1)$.

Если положить

$$\Theta^2(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2) = \sup_{a \in A_1} \Theta(\bar{\rho}_1(a), \bar{\rho}_2(a)),$$

то согласно ([6]) Θ^2 будет метрикой в $A' = \{\bar{\rho}/\bar{\rho} \subset A_1 \times A_1\}$.

Определение 5. Будем говорить, что последовательность гомоморфизмов $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \Psi(A_1)$, удовлетворяющая следующим условиям;

(а) ψ_n гомоморфизм из $(B_n, \bar{\rho}_n)$ в $(C_n, \bar{\sigma}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$,

(б) существуют такие $(B, \bar{\rho})$, $(C, \bar{\sigma})$, что $\{(B_n, \bar{\rho}_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ $\{(C_n, \bar{\sigma}_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ сходятся соответственно к $(B, \bar{\rho})$ и $(C, \bar{\sigma})$ в смысле метрики Θ^2 слабо сходится к отображению ψ, если $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ сходится к ψ в смысле метрики Θ^2.

Теорема 2. *Если отображение ψ является пределом слабо сходящейся последовательности гомоморфизмов $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \Psi(A_1)$, $\Psi(A_1)$ равностепенно непрерывно, то $\psi \in \Psi(A_1)$.*

Определение 6. Будем говорить, что последовательность гомоморфизмов $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \Psi(A_1)$, удовлетворяющая следующим условиям:

(а) ψ_n гомоморфизм из $(B_n, \bar{\rho}_n)$ в $(C_n, \bar{\sigma}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$

(б) существуют такие $(B, \bar{\rho})$, $(C, \bar{\sigma})$, что $\{(B_n, \bar{\rho}_n)\}_{n=1,2,\ldots}$, $\{(C_n, \bar{\sigma}_n)\}_{n=1,2,\ldots}$ сходятся соответственно к $(B, \bar{\rho})$, $(C, \bar{\sigma})$ в смысле метрики Θ^1 сходится равномерно к отображению ψ, если $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ сходится к ψ в смысле метрики Θ.

Теорема 3. *Если отображение ψ является пределом равномерно сходящейся последовательности гомоморфизмов $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \subset \Psi(A_1)$, $\Psi(A_1)$ равностепенно непрерывно, то $\psi \in \Psi(A_1)$.*

Теорема 4. *Если пространство A_1 компактное, $\Psi(A_1)$ равностепенно непрерывное, то оно компактное в смысле слабой сходимости (равномерной сходимости).*

Теорема 5. *Если пространство A_1 компактное, то любая равностепенно непрерывная подполугруппа $\Psi' \subset \Psi(A_1)$ с топологией, определенной согласно слабой сходимости (равномерной сходимости) имеет минимальный двусторонний идеал.*

Доказательство. Доказательство следует из теоремы 3 (теоремы 4) и теоремы Нумакуры ([7]).

Ա. Հ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

Ռելյատիվների հոմոմորֆիզմների մասնակի կիսախմբի մինիմալ երկկողմանի իդեալ

Աշխատանքը նվիրված է ռելյատիվների հոմոմորֆիզմների մասնակի կիսախմբերի հետազոտմանը։ Բազմարժեք հոմոմորֆիզմների մի դասի համար կառուցվում է մինիմալ երկկողմանի իդեալ։

Այնուհետև սահմանվում է տոպոլոգիական ռելյատիվի գաղափարը և մետրիկան ռելյատիվների միջև։ Ապացուցվում է ռելյատիվների տարածության կոմպակտությունը։

Դիտարկվում է ռելյատիվների հոմոմորֆիզմների հաջորդականության հավասարաչափ և թույլ զուգամետությունը և ապացուցվում է հոմոմորֆիզմների տարածության փակ լինելը՝ ըստ այդ զուգամետությունների։

Ապացուցվում է նաև, որ տոպոլոգիական ռելյատիվների հոմոմորֆիզմների տարածությունը ունի մինիմալ երկկողմանի իդեալ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *В. В. Вагнер.* Теория отношений и алгебра частичных отображений сб. «Теория полугрупп и ее приложения», изд. Саратовского ун-та, вып. 1, 3—179, (1965). [2] *Х. Никайдо,* Выпуклые структуры и математическая экономика, М., 1972. [3] *К. Куратовский,* «Топология», т. 1, М., 1966. [4] *К. Куратовский,* «Топология», т. 2, М., 1969. [5] *I. Maurer* Gy. Purdea, Despre o topologie in multimea relatiilor binare, studia Univ. Babes-Bolyai, Ser. math.—phis. 1964, 9 № 1, 21—24, 9 (1964) [6] *Хаусдорф.* Теория множеств, М.—Л., 1934. [7] Numakura, On bicompact semigroups. Math., Journ. of Okayama Univ., 1, 99—108, 1952.