ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVII 1978 1

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Р. Г. Айрапетян

Об эквивалентных формах условия Лопатинского для гиперболических уравнений второго порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 5/V 1978)

Смешанные задачи для гиперболических уравнений при нарушении равномерного условия Лопатинского рассматривались в работах [1–5]. В работах [4,5] был предложен подход, позволяющий свести широкий класс смешанных задач для гиперболического уравнения второго порядка к смешанной задаче с граничным условием Дирихле. При этом в работе [5] условие Лопатинского было заменено требованием, чтобы гиперболический оператор A был бы равен, по модулю граничного оператора, некоторому гиперболическому оператору D такому, что $\mu(t,0,y,D)=0$ (см. ниже).

В настоящей работе доказывается теорема, показывающая, что упомянутое выше требование выполняется тогда и только тогда, когда выполняется условие Лопатинского. Для некоторых задач такая формулировка условия Лопатинского более естественна. Важным следствием этой теоремы является корректность с потерей гладкости смешанной задачи для строго гиперболического уравнения второго порядка при выполнении условия Лопатинского.

Пусть $A=\sum\limits_{|\alpha|\le 2} a_\alpha(t,x,y)D^\alpha$ — гиперболический оператор,

$$B=\sum_{|\alpha|\le 1} b_\alpha(t,y)D^\alpha, \text{ где } D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t^{\alpha_0}\partial x^{\alpha_1}\partial y_1^{\alpha_2}\dots\partial y_{n-1}^{\alpha_n}}.$$

Все коэффициенты предполагаются непрерывными функциями.

Характеристический полином оператора A имеет вид:

$$A_2(t,x,y,\tau,\xi,\eta)=\sum_{i+j+|\gamma|=2} a_{i,j,\gamma}(t,x,y)\tau^i\xi^j\eta^\gamma, \quad a_{2,0,0}=1 \tag{1}$$

где τ,ξ,η — дуальные к t,x,y, переменные. Следуя общепринятой терминологии, будем называть оператор гиперболическим, если уравнение

$$A_2(t,x,y,\tau,\xi,\eta)=0 \tag{2}$$

имеет вещественные корни относительно τ при любых $t\in(0,T)$, $x>0$, $y\in R^{n-1}$, $\xi\in R^1$, $\eta\in R^{n-1}$, и строго гиперболическим, если эти корни различны при $(\xi,\eta)\neq 0$. Будем говорить, что оператор A не характеристический на границе $\Gamma=\{(t,x,y);\ t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^{n-1}\}$, если $a_{0,2,0}\neq 0$ на $\bar\Gamma$, что же касается нехарактеристичности оператора B, характеристический полином которого имеет вид $\sum\limits_{i+j+|l|=1} b_{i,j,l}(t,y)\tau^i\xi^j\eta^l$, то это означает, что $b_{0,1,0}=1$. В дальнейшем предполагается, что операторы A и B не характеристические на границе.

Рассматривается задача

$$
\begin{aligned}
&Au=f && \text{при } t\in(0,T),\ x>0,\ y\in R^{n-1}\\
&Bu=g && \text{при } t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^{n-1}\\
&u=0, u_t=0 && \text{при } t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Из гиперболичности A следует, что уравнение (2) не имеет вещественных корней по ξ при $\tau=\sigma-i\gamma$, $\sigma\in R^1$, $\gamma\in R^1$, $\gamma>0$.

Определим на множестве всех гиперболических операторов второго порядка в области $[0,T]\times R^n_+$ функцию μ следующим образом: $\mu(t,x,y;A)$ есть число корней уравнения (2) относительно ξ в точке (t,x,y) с положительной мнимой частью, при $\tau=\sigma-i\gamma, \gamma>0$. Это определение корректно, так как число корней с положительной мнимой частью не зависит от $\eta, \sigma, \gamma>0$ из-за того, что полином гиперболический.

Нетрудно убедиться, что

$$
\mu(t,x,y;A)=\theta(-a_{0,2,0}(t,x,y))+2\theta(a_{0,2,0}(t,x,y))\theta(a_{1,1,0}(t,x,y)), \tag{4}
$$

где θ—функция Хевисайда $\theta(t)=\begin{cases}1, & \text{при } t\geq 0\\ 0, & \text{при } t<0\end{cases}$

В дальнейшем будем рассматривать только такие операторы A, для которых $\mu(t,0,y;A)\equiv 1$ при $t\in[0,T]$, $y\in R^{n-1}$

Известно, что для корректной постановки смешанной задачи необходимо, чтобы число граничных условий было равно $\mu(t,0,y;A)$. В вопросах корректности смешанных задач для гиперболических уравнений основную роль играет условие Лопатинского. Это условие формулируется следующим образом:

$$
B_1(t,0,y,\tau,\xi^+,\eta)\neq 0, \tag{5}
$$

где $t\in[0,T]$, $y\in R^{n-1}$, $\tau=\sigma-i\gamma$, $\gamma>0$, ξ^+—корень уравнения (2) с положительной мнимой частью.

Сформулируем две простые леммы.

Лемма 1. *Характеристический полином оператора A можно представить в виде*

$$
A_2(t,x,y,\tau,\xi,\eta)=(\tau+\alpha_0\xi+\sum_{l=1}^{n-1}\alpha_l\eta_l)(\tau+\beta_0\xi+\sum_{l=1}^{n-1}\beta_l\eta_l)-\sum_{l,j=1}^{n-1}\gamma_{l,j}\eta_l\eta_j, \tag{6}
$$

где

$$
\alpha_0=\frac{1}{2}a_{1,1,0}-\sqrt{\frac{1}{4}a^2_{1,1,0}-a_{0,2,0}} \tag{7}
$$

$$\beta_0 = \frac{1}{2} a_{1,1,0} + \sqrt{\frac{1}{4} a^2_{1,1,0} - a_{0,2,0}}\,,$$

при этом A—строго гиперболический тогда и только тогда, когда $\alpha_0 \neq \beta_0$, $\|\gamma_{i,j}\| > 0$.

Лемма 2. Если P_1 и P_2—гиперболические операторы, то

$$\mu(t,x,y;P_1P_2) = \mu(t,x,y;P_1) + \mu(t,x,y;P_2)$$

Эквивалентность трех формулировок условия Лопатинского устанавливает следующая

Теорема. *Пусть A—гиперболический оператор второго порядка, определенный в области $[0,T] \times R^n_+$ и такой, что $\mu(t,0,y;A) = 1$; B—оператор первого порядка. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(I) *Условие Лопатинского для задачи $\{A,B\}$*

(II) *Существует гиперболический оператор второго порядка D, заданный в области $[0,T] \times R^{n-1}$ и такой, что на $\bar{\Gamma}$*

а) $A = RB + D$. *R—оператор первого порядка* (8)

б) $\mu(D) = 0$.

При этом, оператор D может быть выбран строго гиперболическим, если A—строго гиперболический оператор.

(III) *На $\bar{\Gamma}$ выполняются следующие условия на коэффициенты операторов A и B:*

$$\text{при } n \geq 3,\ \frac{1}{2}\, b_{1,0,0}\left(a_{1,1,0} + \sqrt{a^2_{1,1,0} - 4a_{0,2,0}} \right) < 1 \tag{9}$$

$$\text{при } n = 2,\ \frac{1}{2}\, b_{1,0,0}\left(a_{1,1,0} + \sqrt{a^2_{1,1,0} - 4a_{0,2,0}} \right) \neq 1$$

$$[\beta_1(1 - b_{1,0,0}\,\alpha_0) - \alpha_1(1 - b_{1,0,0}\,\beta_0) - b_{0,0,1}(\beta_0 - \alpha_0)]^2 + \tag{10}$$
$$+ 4\gamma(1 - b_{1,0,0}\,\beta_0)(1 - b_{1,0,0}\,\alpha_0) > 0$$

Доказательство. Покажем, что из условия II следует условие I. Факторизовав характеристические полиномы операторов A и D по ξ, запишем равенство (8) в следующем виде:

$$a_{0,2,0}(\xi - \xi^+)(\xi - \xi^-) = R(\tau,\xi,\eta)B(\tau,\xi,\eta) + d_{0,2,0}(\xi - \zeta_1^-)(\xi - \zeta_2^-)$$

$B(\tau,\xi^+\eta) \neq 0$ так как из $B(\tau,\xi^+\eta) = 0$ следует $(\xi^+ - \zeta_1^-)(\xi^+ - \zeta_2^-) = 0$, что невозможно, так как ζ_1^-, ζ_2^- —корни с отрицательной мнимой частью. Теперь докажем, что из условия III следует условие II. Рассмотрим случай $n \geq 3$.

Воспользовавшись леммой I и разложением (8), запишем характеристический полином $D_2(t,y,\tau,\xi,\eta)$ следующим образом:

$$D_2(t,y,\tau,\xi,\eta) = A_2(t,0,y,\tau,\xi,\eta) - R(t,y,\tau,\xi,\eta)\,(b_{1,0,0}\tau + \xi + \sum_{|\nu|=1} b_{0,0,\nu}\eta^\nu),$$

где $\alpha_0 < 0$, $\beta_0 > 0$. Будем искать оператор R в виде:

$$R=\lambda(t,\ y_1)\,(\tau+\alpha_0\xi+\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\eta_i).$$

Наложив на D требования теоремы, получаем систему неравенств для нахождения λ:

$$1-\lambda b_{1,0,0}>0$$

$$\beta_0-\lambda<0$$

Эта система совместна, если $b_{1,0,0}\beta_0<1$. В случае $n=2$ единственное отличие доказательства заключается в том, что R выбирается несколько иначе:

$$R=\lambda_1(t,\ y)\,[\tau+\alpha_0\xi+\alpha_1\eta]+\lambda_2(t,\ y)\,\frac{1-b_{1,0,0}\beta_0}{2}\eta.$$

Осталось доказать, что из условия I следует условие III. Пусть не выполняется условие III. Покажем, что условие Лопатинского нарушается, т. е. существуют $\sigma\in R^1$, $\eta\in R^{n-1}$, $\gamma>0$ такие, что $B_1(t,0,y,\tau,\xi+\eta)=0$. Обозначим $z=B_1(t,0,y,\tau,\xi+\eta)$ и рассмотрим равенство $A_2(t,0,y,\tau,\xi+\eta)=0$

$$A_2(t,0,y,\tau,\xi+\eta)=[\alpha_0 z+(1-b_{1,0,0}\alpha_0)\tau+\sum_{i=1}^{n-1}b_{1,i}\eta_i]\times$$

$$[\beta_0 z+(1-b_{1,0,0}\beta_0)\tau+\sum_{i=1}^{n-1}b_{2,i}\eta_i]-\sum_{i,j=1}^{n-1}\gamma_{i,j}\eta_i\eta_j=0,$$

$$\text{где}\ \sum_{i=1}^{n-1}b_{1,i}\eta_i=\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\eta_i-\alpha_0\sum_{|\nu|=1}b_{0,0,\nu}\eta^\nu$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}b_{2,i}\eta_i=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\eta_i-\beta_0\sum_{|\nu|=1}b_{0,0,\nu}\eta^\nu$$

Для доказательства теоремы остается приравнять $z=0$ и показать, что существуют $\eta\in R^{n-1}$, $\tau=\sigma-i\gamma$, $\sigma\in R^1$, $\gamma>0$, для которых выполняется равенство

$$[(1-b_{1,0,0}\alpha_0)\tau+\sum_{i=1}^{n-1}b_{1,i}\eta_i]\,[(1-b_{1,0,0}\beta_0)\tau+\sum_{i=1}^{n-1}b_{2,i}\eta_i]-\sum_{i,j=1}^{n-1}\gamma_{i,j}\eta_i\eta_j=0$$

Разделив в этом равенстве вещественную и мнимую части, получим следующую систему:

$$[(1-b_{1,0,0}\alpha_0)\sigma+\sum_{i=1}^{n-1}b_{1,i}\eta_i]\,[(1-b_{1,0,0}\beta_0)\sigma+\sum_{i=1}^{n-1}b_{2,i}\eta_i]-$$

$$-\gamma^2(1-b_{1,0,0}\alpha_0)(1-b_{1,0,0}\beta_0)-\sum_{i,j=1}^{n-1}\gamma_{i,j}\eta_i\eta_j=0,$$

$$\gamma(1-b_{1,0,0}\beta_0)[(1-b_{1,0,0}\alpha_0)\sigma+\sum_{i=1}^{n-1}b_{1,i}\eta_i]+\gamma(1-b_{1,0,0}\alpha_0)\times$$

$$\times[(1-b_{1,0,0}\beta_0)\sigma+\sum_{i=1}^{n-1}b_{2,i}\eta_i]=0.$$

Нетрудно убедиться, что при нарушении условия III, эта система имеет решение, обладающее требуемыми свойствами.

Следствие. *Пусть коэффициенты операторов A и B—достаточно гладкие функции. Оператор A—строго гиперболический, операторы A и B—не характеристические на границе. Тогда, при выполнении условия Лопатинского, существует такое $\gamma_0>0$, что при $\gamma\geq\gamma_0$ для любых $f\in H^{p,\gamma}((0,T)\times R^n_+)$, $g\in H^{p,\gamma}((0,T)\times R^{n-1})$, удовлетворяющих определенным условиям согласования, при $p\geq 3$ существует единственное решение $u\in H^{p,\gamma}((0,T)\times R^n_+)$* и имеет место *оценка:*

$$\gamma|u|^2_{p,\gamma}\leqslant\text{const}\left(\frac{1}{\gamma}\ |Au|^2_{p,\gamma}+\langle Bu\rangle^2_{p,\gamma}\right) \tag{11}$$

Относительно обозначений см. например ([6]).

Доказательство. Пусть L—продолжение на $x>0$ оператора B такое, что $A=RL+D$, где D—строго гиперболический оператор и $\mu(t,0,y,D)=0$. Можно показать, что оператор R может быть подобран так, чтобы DA был также строго гиперболический оператор.

$$ALu+[L,A]u=Lf$$

Обозначив $Lu=v$, получаем систему:

$$\begin{gathered}Av+[L,A]u=Lf\\ Du+Rv=f\end{gathered}$$

Применим к обеим частям первого уравнения оператор D:

$$\begin{gathered}DAv-[L,A]Rv+[D,[L,A]]u=(DL-[L,A])f,\\ Du+Rv=f.\end{gathered} \tag{12}$$

Полученная система является слабо связанной в том смысле, что в главную часть первого уравнения входит только функция v, а в главную часть второго уравнения только функция u. Для этой системы ставится следующая смешанная задача:

$$\begin{gathered}u=u_t=v=0,\ v_t=l_{1,0,0}(0,x,y)\,f(0,x,y)\ \text{при}\ t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1}\\ v=g\ \text{при}\ t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^{n-1}\end{gathered} \tag{13}$$

Из леммы 2 следует $\mu(DA)=\mu(D)+\mu(A)=1$. Воспользовавшись оценкой, полученной в работе ([6]), получаем следующие оценки:

$$\begin{gathered}\gamma|v|^2_{p,\gamma}\leqslant\text{const}\left(\frac{1}{\gamma}|Au|^2_{p,\gamma}+\langle v\rangle^2_{p,\gamma}+\frac{1}{\gamma}|u|^2_{p,\gamma}\right)\\ \gamma|u|^2_{p,\gamma}\leqslant\text{const}\left(\frac{1}{\gamma}A|u|^2_{p,\gamma}+\frac{1}{\gamma}|v|^2_{p,\gamma}\right)\end{gathered} \tag{14}$$

Выбрав γ_0 достаточно большим, получим оценку (11). Существование решения может быть получено из системы (12) методом последовательных приближений.

Пример 1. Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения с числом пространственных переменных больше двух:

$$u_{tt}-u_{xx}-\sum_{i=1}^{n-1}u_{y_i\,y_i}=f\qquad \text{при}\quad t\in(0,T),\ x>0,\ y\in R^{n-1}$$

$$\begin{aligned} &u_x+\alpha u_t+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i u_{y_i}=g \quad &&\text{при} \quad t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^{n-1} \\ &u=0,\ u_t=0 \quad &&\text{при} \quad t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1} \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда из теоремы и следствия следует, что для задачи (15) имеет место корректность с потерей гладкости при $\alpha<1$. Это условие совпадает с условиями, полученными в работах [3,4].

Пример 2. Рассмотрим смешанную задачу для волнового уравнения с двумя пространственными переменными:

$$\begin{aligned} &u_{tt}-u_{xx}-u_{yy}=f \quad &&\text{при} \quad t\in(0,T),\ x>0,\ y\in R^1 \\ &u_x+\alpha u_t+\beta u_y=g \quad &&\text{при} \quad t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^1 \\ &u=0,\ u_t=0 \quad &&\text{при} \quad t=0,\ x>0,\ y\in R^1 \end{aligned} \tag{16}$$

Условие корректности с потерей гладкости, полученное для этой задачи, несколько отличается от предыдущего и выглядит следующим образом:

$$\alpha\neq 1, \quad \alpha<\sqrt{1+\beta^2}.$$

Это условие также совпадает с условием, полученным в работе [4].

Пример 3. Пусть A—строго гиперболический оператор второго порядка, не характеристический на границе, и $\mu(t,0,y;A)=1$ при $t\in(0,T)$, $y\in R^{n-1}$. Рассмотрим смешанную задачу:

$$\begin{aligned} &Au=f \quad &&\text{при} \quad t\in(0,T),\ x>0,\ y\in R^{n-1} \\ &u_x+\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i u_{y_i}=g \quad &&\text{при} \quad t\in(0,T),\ x=0,\ y\in R^{n-1} \\ &u=0,\ u_t=0 \quad &&\text{при} \quad t=0,\ x>0,\ y\in R^{n-1} \end{aligned}$$

Такая задача корректно поставлена, так как условие (11) для нее всегда выполняется.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ռ. Գ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

Երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար Լոպատինսկու պայմանի համարժեք ձևակերպումների մասին

Հոդվածում դիտարկվում է խառը խնդիրը երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար։ Ինչպես հայտնի է, այդպիսի խնդիրը կոռեկտ է, եթե բավարարում է Լոպատինսկու պայմանին։ Սակայն թույլ հիպերբոլական հավասարումների համար խառը խնդրի կոռեկտությունը հարմար է ապացուցել մի ուրիշ պայմանի դեպքում [5]։ Այդ պայմանը կայանում է նրանում, որ օպերատորի համար տեղի է ունենում որոշակի վերլուծություն։ Որոշ խնդիրների դեպքում այս պայմանը ավելի բնական է։

Հոդվածում ապացուցվում է, որ այդ երկու պայմանները իրար համարժեք են։ Որպես կարևոր հետևանք, Լոպատինսկու պայմանի դեպքում ապացուցվում է երկրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարումների համար խառը խնդրի կոռեկտությունը։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. Ykawa*. Osaka J. Math., 12,69-111 (1975). [2] *Ж. Шазарен*. "Математика" Сб. пер. ин. статей, 18, №2, 79-109 (1974). [3] *M. Tsuji*. Proc. Jap. Acad., 50, № 2, 138-142 (1974). [4] *С. К. Годунов. В. М. Гордиенко*. Труды семинара С. Л. Соболева. Дифференциальные уравнения с частными производными, № 2, 5-31, Новосибирск (1977). [5] *Р. Айрапетян*. ДАН Арм. ССР, т. 65, № 1 (1977). [6] *Р. Сакамото*, "Математика". Сб. пер. ин. статей, 16, № 1, 62-80 (1972).