ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVII 1978 1

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. Петросян

О решении с оценкой $\bar{\partial}$-уравнения в некоторых областях

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 24/II 1978)

Пусть D — область голоморфности в n-мерном комплексном пространстве C^n; $f(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)d\bar{z}_k$ — бесконечно дифференцируемая в $\bar{D}$, $\bar{\partial}$ — замкнутая форма типа (0,1). В случае, если D—строго псевдовыпуклая область, в ([1]) и ([2]) найдены формулы решения уравнения

$$\bar{\partial}u=f, \tag{1}$$

допускающего равномерную оценку

$$\|u\|_{C(D)}\leq\gamma\cdot\|f\|_{C(D)}, \tag{2}$$

$$\text{где } \|u\|_{C(D)}=\sup_{z\in D}|u(z)|,\ \|f\|_{C(D)}=\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_{C(D)}$$

и постоянная γ от f не зависит. Для невырожденного полиэдра D задача решена Г. М. Хенкиным ([3]).

В настоящей работе дана формула решения уравнения (1) с оценкой (2) для областей D, ограниченных с одной стороны аналитической гиперповерхностью, а с другой—строго псевдовыпуклой гиперповерхностью:

$$D=\left\{z:\rho(z)<0,\ |\chi(z)|<1\right\}. \tag{3}$$

Здесь $\chi(z)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности Ω замыкания области $\bar{D}$; $\rho(z)$ — вещественнозначная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, строго плюрисубгармоническая в Ω, т.е. квадратичная форма

$$\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}w_j\bar{w}_k$$

положительно определена при всех $z\in\Omega$. Граница ∂D области состоит из двух граней

$$\sigma_1=\{z\in\bar{D}:\rho(z)=0\}\ \text{ и }\ \sigma_2=\{z\in\bar{D}:\ |\chi(z)|=1\}.$$

Область D будем предполагать невырожденной в смысле R^{2n} т. е.

$$\operatorname{grad}\rho(z)\neq 0,\ z\in\sigma_1;\ \operatorname{grad}\chi(z)\neq 0,\ z\in\sigma_2$$

и $\operatorname{rang}\begin{Vmatrix}\operatorname{grad}\rho, & \overline{\operatorname{grad}\rho}\\ \operatorname{grad}\chi, & \overline{\operatorname{grad}\chi}\end{Vmatrix}=2$ на „остове" $\sigma_1\cap\sigma_2$. Пусть, далее, $\Phi(\zeta,z)$ — ядро, построенное по функции $\rho(z)$ в ([3]); $P(\zeta,z)=(P_1(\zeta,z),\ldots,P_n(\zeta,z))$, — соответствующая вектор-функция

$$\Phi(\zeta,z)=\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)\,P_k(\zeta,z);$$

пусть $Q(\zeta,z)=(Q_1(\zeta,z),\ldots,Q_n(\zeta,z))$, где $Q_k(\zeta,z)$ — коэффициенты Гефера функции χ_k /см., например, ([4]) /, т. е.

$$\chi(\zeta)-\chi(z)=\sum_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)Q_k(\zeta,z).$$

При фиксированном $z\in D$ построим поверхность D_z в пространстве переменных $(\zeta,\eta)\in C^{2n}$ следующим образом:

$$\eta=(1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{P(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)},\qquad \text{если}\quad \zeta\in\sigma_1;\ 0\leq\lambda\leq 1;$$

$$\eta=(1-\mu)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\mu\frac{Q(\zeta,z)}{\chi(\zeta)-\chi(z)},\qquad \text{если}\quad \zeta\in\sigma_2;\ 0\leq\mu\leq 1;$$

$$\eta=(1-\lambda-\mu)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{P(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}+\mu\frac{Q(\zeta,z)}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\ \text{если}\ \zeta\in\sigma_1\cap\sigma_2;\ \lambda+\mu\leq 1.$$

Пусть $u(z)$ — гладкая на $\bar D$ функция. Применяя формулу Стокса к форме $u(\zeta)\omega^1(\eta)\wedge\omega(\zeta)$, где

$$\omega^1(\eta)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\eta_k\bigwedge_{j\neq k}d\eta_j,\quad \omega(\zeta)=\bigwedge_{j=1}^{n}d\zeta_j,$$

будем иметь

$$\int_{\zeta\in\partial D_z}u(\zeta)\omega^1(\eta)\wedge\omega(\zeta)=\int_{\zeta\in D_z}\bar\partial u(\zeta)\wedge\omega^1(\eta)\wedge\omega(\zeta)\ ,$$

или

$$\int_{\zeta\in\sigma_1}u(\zeta)\omega^1\left(\frac{P}{\Phi}\right)\wedge\omega(\zeta)+\int_{\zeta\in\sigma_2}u(\zeta)\omega^1\left(\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\right)\wedge\omega(\zeta)+$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in[\sigma_1\cap\sigma_2]\times[0,1]}u(\zeta)\omega^1\left(\lambda\frac{P}{\Phi}+(1-\lambda)\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\right)\wedge\omega(\zeta)=\int_{\zeta\in\partial D}u(\zeta)\omega^1\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)\wedge\omega(\zeta)+$$

$$+\int_{(\zeta,\lambda)\in\sigma_1\times[0,1]}\bar\partial u(\zeta)\wedge\omega^1\left((1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{P}{\Phi}\right)\wedge\omega(\zeta)+\int_{(\zeta,\mu)\in\sigma_2\times[0,1]}\bar\partial u(\zeta)\wedge\omega^1\left((1-\mu)\right.$$

$$\left.\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\mu\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\right)\wedge\omega(\zeta).$$

Отсюда, с учетом формулы Мартинелли—Бохнера для гладких функций

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1!)}u(z)=\int\limits_{\zeta\in\partial D}u(\zeta)\omega_1\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)\wedge\omega(\zeta)-\int\limits_{\zeta\in D}\bar\partial u(\zeta)\wedge\omega^1\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)\wedge\omega(\zeta)$$

следует

Теорема 1. Для всякой гладкой в $\bar D$ функции $u(z)$ имеет место представление

$$\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}u(z)=\int\limits_{\zeta\in\sigma_1}u(\zeta)\omega^1\left(\frac{P}{\Phi}\right)\wedge\omega(\zeta)+\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in[\sigma_1\cap\sigma_2]\times[0,1]}u(\zeta)\omega^1\left((1-\lambda)\frac{P}{\Phi}+\lambda\right.$$

$$\left.\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\right)\wedge\omega(\zeta)-\int\limits_{\zeta\in D}\bar\partial u(\zeta)\wedge\omega^1\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)\wedge\omega(\zeta)-\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in\sigma_1\times[0,1]}\bar\partial u(\zeta)\wedge\omega^1\left((1-\lambda)\right.$$

$$\left.\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{P}{\Phi}\right)\wedge\omega(\zeta)-\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in\sigma_2\times[0,1]}\bar\partial u(\zeta)\wedge\omega^1\left((1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\right)\wedge\omega(\zeta). \quad (4)$$

Формула (4) является многомерным аналогом формулы Коши — Грина для областей рассматриваемого типа (3).

Как и в одномерном случае, она позволяет выписать в явном виде решение $\bar\partial$—уравнения.

Теорема 2. *Функция $u(z)$, определяемая в D формулой*

$$-\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!}u(z)=\int\limits_{\zeta\in D}f(\zeta)\wedge\omega^1\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)\wedge\omega(\zeta)+\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in\sigma_1\times[0,1]}f(\zeta)\wedge\omega^1\left((1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\right.$$

$$\left.+\lambda\frac{P}{\Phi}\right)\wedge\omega(\zeta)+\int\limits_{(\zeta,\lambda)\in\sigma_2\times[0,1]}f(\zeta)\wedge\omega^1\left((1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\right)\wedge\omega(\zeta), \quad (5)$$

является решением уравнения (1), *причем оно допускает оценку* (2).

Первые два слагаемых в правой части (5) оцениваются тем же способом, что и в ([2]). Третье слагаемое $J(z)$ имеет ядро с неинтегрируемой особенностью при $z\in\sigma_2$. Поэтому необходимо привести его к форме, более удобной для оценок. Проделаем это, для простоты, в случае, когда D—полушар в C^2:

$$D=\{\zeta\in C^2:\ |\zeta|^2<1,\ \operatorname{Im}\zeta_2>0\}.$$

Имеем

$$\rho(\zeta)=|\zeta|^2-1;\ \chi(\zeta)=\zeta_2,\ P=(\bar\zeta_1,\bar\zeta_2);\ Q=(0,1).$$

С учетом, что на $\sigma_2\times[0.1]$

$$\omega^1\left((1-\lambda)\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{Q}{\chi(\zeta)-\chi(z)}\right)\wedge\omega(\zeta)=$$

$$\frac{\begin{vmatrix}\bar\zeta_1-\bar z_1 & Q_1\\ \bar\zeta_2-\bar z_2 & Q_2\end{vmatrix}}{|\zeta-z|^2[\chi(\zeta)-\chi(z)]}\omega(\zeta)\wedge d\lambda=\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\omega(\zeta)\wedge d\lambda,$$

будем иметь

$$J(z)=\int_{\sigma_2} f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta).$$

Пусть $\varepsilon>0$ и

$$T_z^{\varepsilon}=\{\zeta\in\bar D:\ |\zeta-z|\leqslant\varepsilon\}.$$

Применяя формулу Стокса к форме

$$f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)$$

в области $D\setminus T_z^{\varepsilon}$, получаем

$$\int_{\sigma_2} f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)+\int_{\sigma_1\setminus T_z^{\varepsilon}} f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)-$$

$$-\int_{|\zeta_2-z_2|=\varepsilon,\ |\zeta_1|<1} f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)=\int_{D\setminus T_z^{\varepsilon}} f(\zeta)\frac{(\bar\zeta_2-\bar z_2)d\bar\zeta_1-(\bar\zeta_1-\bar z_1)d\bar\zeta_2}{|\zeta-z|^4}.$$

Устремляя ε к нулю, отсюда получаем

$$J(z)=\int_{D} f(\zeta)\wedge\frac{(\bar\zeta_2-\bar z_2)d\bar\zeta_1-(\bar\zeta_1-\bar z_1)d\bar\zeta_2}{|\zeta-z|^4}\wedge\omega(\zeta)-$$

$$-\int_{\sigma_1} f(\zeta)\wedge\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2(\zeta_2-z_2)}\,\omega(\zeta)-\int_{|\zeta_1|<\sqrt{1-|z_2|^2}} f_1(\zeta_1,z_2)\frac{d\bar\zeta_1\wedge d\zeta_1}{\zeta_1-z_1}. \qquad (6)$$

Все три интеграла в (6) допускают равномерную оценку (2) в силу их равномерной сходимости при $z\in D$.

Ереванский государственный университет

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

Որոշ տիրույթներում $\bar\partial$-հավասարման գնահատականով լուծման մասին

Աշխատանքում բերված է $\bar\partial u=f$ հավասարման լուծման բանաձևը D տիրույթում n չափանի կոմպլեքս տարածության մեջ։ Այստեղ f-ը (0,1) տիպի դիֆերենցիալ ձև է, որի համար $\bar\partial f=0$, իսկ D տիրույթը որոշվում է հետևյալ պայմանով՝

$$D=\{z:\ \rho(z)<0,\ |\chi(z)|<1\},$$

որտեղ $\rho(z)$-ը երկու անգամ անընդհատ ածանցելի և խիստ պլյուրիսուբհար-

մոնիկ է D տիրույթի փակման որևէ շրջակայքում, իսկ $\chi(z)$-ը հոլոմորֆ է նույն շրջակայքում։

Կիրառումների համար կարևոր է ունենալ $\bar{\partial}$-հավասարման այնպիսի $u(z)$ լուծում, որը թույլ է տալիս հավասարաչափ գնահատական, այսինքն, բավարարում է $\|u\| \leqslant \gamma \cdot \|f\|$ անհավասարությանը, որտեղ γ մեծությունը կախված է միայն տիրույթից։ Ապացուցվում է, որ բանաձևով բերված մեր լուծումը բավարարում է հավասարաչափ գնահատականին։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Grauert H.,* Lieb J., Rice Univ. Stud., 56, № 2, 1970. [2] *Г. М. Хенкин,* Мат. сб., т. 82; 2, 1970. [3] *Г. М. Хенкин,* УМН, т. 26: 3, 1971. [4] *Б. В. Шабат,* Введение в комплексный анализ, ч. 2, М., 1976.