УДК 5.19.217

МАТЕМАТИКА

Э. А. Даниелян

О периодах занятости одноканальных систем с прерываниями обслуживания

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 28/VII 1977)

1°. В (1) предложен путь определения совместной функции распределения (ф. р.) периода занятости (п. з.) и числа обслуженных за п. з. вызовов в общей одноканальной системе массового обслуживания СМО с ожиданием и несколькими потоками вызовов, не прибегая к преобразованиям Лапласа. На основе результата из (1), который сформулируем ниже, в настоящей заметке получены аналогичные результаты для СМО с прерыванием обслуживания.

В СМО без прерывания обслуживания, с ожиданием, r независимыми пуассоновскими потоками вызовов $L_1, \dots, L_r$ и одним прибором, параметр потока L_i i — вызовов ($i = \overline{1, r}$) — $a_i > 0$. Случайная длительность обслуживания i — вызова β_i с ф. р. $B_i(t)$ представима в виде суммы q_i независимых случайных величин (сл. в) $\beta_i^q = \beta_i^{(1)} + \dots + \beta_i^{(q)}$, $P\{\beta_i^{(j)} < t\} = B_i^{(j)}(t)$ ($i = \overline{1, r}$; $j = \overline{1, q_i}$; $q_i \geq 1$). Длительности обслуживания независимы в совокупности и не зависят от процесса поступления. Будем говорить, что сл. в. $\beta_i^{(j)}$ является j -фазой i -вызова ($i = \overline{1, r}$; $j = \overline{1, q_i}$; $q_i \geq 1$).

Пусть с момента $t = 0$, в который в системе присутствуют m_i нетронутых обслуживанием i -вызовов ($i = \overline{1, r}$; $m_i \geq 0$), время $x \geq 0$ прибор заперт для обслуживания. Обозначим через $\pi(x; m^{(r)})$, где $m^{(r)} = (m_1, \dots, m_r)$, первый момент $\geq x$ отсутствия вызовов в системе. Сл. в. $\pi(x; m^{(r)})$ — п. з. со временем задержки $x \geq 0$, инициированный m_i i -вызовами ($i = \overline{1, r}$; $m_i \geq 0$).

Пусть $S(n^{(r)}; t^{(q^{(r)})})$, где $n^{(r)} = (n_1, \dots, n_r)$, $q^{(r)} = (q_1, \dots, q_r)$, $t^{(q^{(r)})} = (t_1^{(q_1)}, \dots, t_r^{(q_r)})$, $t_k^{(q_k)} = (t_{k1}, \dots, t_{kq_k})$, есть следующее событие: $|n_k$ k -вызовов обслужено; суммарная длительность j — фаз k -вызовов $< t_{kj}$ ($k = \overline{1, r}$; $j = \overline{1, q_k}$; $q_k \geq 1$) и $\Pi_{m^{(r)}}(x; n^{(r)}; t^{(q^{(r)})})$ — вероятность (вер.) осуществления события $S(n^{(r)}; t^{(q^{(r)})})$ в п. з. $\pi(x; m^{(r)})$.

Теорема 1. Если $n_i \geq m_i \geq 0$; $B_i^{(j)}(+0) = 0$ ($i = \overline{1, r}$; $j = \overline{1, q_i}$; $q_i \geq 1$), $|n^{(r)}| = n_1 + \dots + n_r > 0$, то

$$d_{t^{(q^{(r)})}}^+ \Pi_{m^{(r)}}(x; n^{(r)} t^{(q^{(r)})}) = \exp \left\{ -\sigma \cdot t |t|^{n^{(r)} - |m^{(r)}| - 1} \right\} x + \\ + \sum_{k=1}^r \frac{m_k}{n_k} \left| t_k^{(q_k)} \right| \left\{ \prod_{k=1}^r \frac{a_k^{n_k - m_k}}{(n_k - m_k)!} \prod_{j=1}^{q_k} d_{t_{kj}} [B_k^{(j)}(t_{kj})]^{n_k} \right\}, \quad (1)$$

где $\sum_{k=1}^r \left(\prod_{k=1}^r \right)$ означает, что суммирование (произведение) берется по тем k , для которых $m_k > 0$ ($n_k > 0$); d — знак дифференциала, $+$ — знак свертки

$$t = x + |t_1^{(q_1)}| + \dots + |t_r^{(q_r)}|; |t_i^{(q_i)}| = t_{i1} + \dots + t_{iq_i}; |m^{(r)}| = m_1 + \dots + m_r;$$

$$d_{t^{(q^{(r)})}}^+ = \prod_{k=1}^r d_{t_k^{(q_k)}}; d_{t_i^{(q_i)}} = \prod_{j=1}^{q_i} d_{t_{ij}}; \sigma = a_1 + \dots + a_r.$$

2°. Рассмотрим класс СМО, описанный выше, при $q_1 = \dots = q_r = 1$, с тем лишь отличием, что i -вызов, поступивший во время обслуживания j -вызова ($1 \leq i < j \leq r$), замещает на приборе j -вызов, который: а) при новом поступлении на прибор дообслуживается; б) теряется; в) обслуживается заново. Классы дисциплин а), б), в) включают в себя дисциплины абсолютного приоритета с дообслуживанием, потерей и обслуживанием заново прерванного вызова (2).

Результаты, выводимые ниже, для разновидностей СМО с абсолютным приоритетом справедливы для классов дисциплин а), б), в) соответственно.

3. Абсолютный приоритет с дообслуживанием. Пусть $n_i^{(r-1)} = (n_{i2}, \dots, n_{ir})$, $t^{(r-1)} = (t_2, \dots, t_r)$ ($i = 1, 2$); $n^{(2r-2)} = (n_1^{(r-1)}, n_2^{(r-1)})$. Определим событие: $T(n^{(2r-2)}; \bar{t}^{(r-1)}) = \{ \text{обслужено } n_{2k} \text{ } k\text{-вызовов за время } < t_k; \text{ обслуживание } k\text{-вызовов прерывалось } n_{1k} \text{ раз } (k = \overline{2, r}) \}$ и, всюду ниже, $S(n, t) = \{ n \text{ } 1\text{-вызовов обслужено за время } < t \}$, $\pi(m^{(r)})$ — п. з., инициированный $m^{(r)}$ штук вызовами, π_{k-1} — п. з. обслуживанием $\overline{1, k-1}$ -вызовов, инициированный одним $\overline{1, k-1}$ -вызовом; $\Pi_{k-1}(t) = P \{ \pi_{k-1} < t \}$. Обозначим через $\hat{\Pi}_{m^{(r)}}(n^{(2r-1)}; t^{(r)})$, где $n^{(2r-1)} = (n, n^{(2r-2)})$, $t^{(r)} = (t, t^{(r-1)})$, вер. осуществления события $T(n^{(2r-2)}; \bar{t}^{(r-1)}) \cap S(n, t)$ за п. з. $\pi(m^{(r)})$.

Очевидно, при $n_{2k} = 0$ ($k = \overline{2, r}$) вер. $d_{t^{(r)}}^+ \hat{\Pi}_{m^{(r)}}(n^{(2r-1)}; t^{(r)})$ распадается на произведение той же вер. (без учета поступления k -вызовов) и $\exp \{-a_k t_{(r)}\}$, где $t_{(k)} = t + t_2 + \dots + t_k$ ($k = \overline{2, r}$). Поэтому предполагаем $n_{2k} > 0$ ($k = \overline{2, r}$) и, исходя из аналогичных соображений, $n > 0$.

При заданных $n_i^{(r-1)}$, $n_{2k} > 0$ ($i = 1, 2$; $k = \overline{2, r}$) и целом $m^{(r)} > 0$ запишем систему уравнений.

$$0 < m_k + m_{(k-1)} = m_{(k)} + n_{1k}; \quad m_k \leq \min(n_{2k}, m_{(k)}); \quad n_{1k} \leq m_{(k-1)} \quad (k = \overline{2, r});$$

$$m_{(1)} \leq n. \quad (2)$$

Теорема 2. При $n_{2k} > 0$, $m_{(k-1)} \geq n_{1k}$ ($k = \overline{2, r}$), $n > 0$, $B_i(+0) = 0$ ($i = \overline{1, r}$) имеем

$$\sigma^{m_{(r)}} d_{t_{(r)}} \hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)}; t^{(r)}) = \exp\{-\sigma t_{(r)}\} \left\{ \prod_{k=2}^r (a_k^{n_{2k}} t_k^{n_{1k}} / n_{1k}!) d_{t_k} [B_k(t_k)]^{n_{2k}} \right\}.$$

$$a_1^n \sum_{k=2}^r \prod_{k=2}^r (m_{(k)}! t_k^{n_{2k} - m_k - 1} / m_k! (m_{(k)} - m_k)!) [t_{(k-1)} + (m_k / n_{2k}) t_k] d_{t_k} \Pi_{m_{(1)}}(0, n, t). \quad (3)$$

где $\Pi_{m_{(1)}}(0, n, t)$ определяется из (1) при $r = 1$, $q_1 = 1$, $B_1^{(1)}(t) = B_1(t)$.

Доказательство. Пусть внутри $\pi(m_{(r)})$ обслужено n_{2r} r -вызовов за время t_r . Число прерываний обслуживания n_{1r} r -вызовов есть поступление n_{1r} $\overline{1, r-1}$ -вызовов за время $t_{(r)}$. Эти n_{1r} и $m_{(r-1)} - n_{1r}$ (из первоначальных $m_{(r)}$ $\overline{1, r-1}$ -вызовов порождают $m_{(r-1)}$ независимых п. з. типа π_{r-1} , которые переносятся в начало п. з. $\pi(m_{(r)})$ и служат промежутком накопления r -вызовов. Поскольку в начале $\pi(m_{(r)})$ имеются $m_{(r)}$ нетронутых обслуживанием r -вызовов, на основе (2) находим вер. $R_{(m_r, m_{(r-1)})}^{(r)}(n_{1r}; n_{2r}; y; t_r)$ того, что за $\pi(m_{(r)})$ обслужено n_{2r} r -вызовов за время $< t_r$; обслуживание r -вызовов прерывалось n_{2r} раз и суммарная длительность п. з. типа π_{r-1} меньше y ($t_{(r)} = y + t_r$)

$$d_y d_{t_r} R_{(m_r, m_{(r-1)})}^{(r)}(n_{1r}; n_{2r}; y; t_r) = \exp\{-a_r t_{(r)}\} t_{(r)}^{n_{2r} - m_r - 1} \frac{a_r^{n_{2r} - m_r}}{(n_{2r} - m_r)!} \left\{ y + \frac{m_r}{n_{2r}} t_r \right\}. \quad (4)$$

$$\frac{(a_{r-1} t_r)^{n_{1r}}}{n_{1r}!} e^{-a_{r-1} t_r} d_{t_r} [B_r(t_r)]^{n_{2r}} d_y [\Pi_{r-1}(y)]^{m_{(r-1)}}.$$

Так как число $\overline{1, r-1}$ -вызовов, число прерываний и суммарная длительность их обслуживания за п. з. типа π_{r-1} зависят только от длины данных п. з. типа π_{r-1} , то с помощью (4) получаем ($\sigma_k = a_1 + \dots + a_k$; $k = \overline{1, r}$; $\sigma = \sigma_r$)

$$\sigma^{m_{(r)}} d_{t_{(r)}} \hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)}; t^{(r)}) = a_r^{n_{2r}} \exp\{-(a_r t_{(r)} +$$

$$+ a_{r-1} t_r)\} \frac{t_r^{n_{1r}}}{n_{1r}!} d_{t_r} [B_r(t_r)]^{n_{2r}}. \quad (4)$$

$$\sum \frac{m_{(r)}!}{m_r!(m_{(r)}-m_r)!} \frac{t_r^{n_{2r}-m_r-1}}{(n_{2r}-m_r)!} \left\{ t_{(r-1)} + \frac{m_r}{n_{2r}} t_r \right\} \sigma_{r-1}^{m_{(r-1)}} d_{t_{(r-1)}} \hat{\Pi}_{m_{(r-1)}}(n^{(2r-3)}; t^{(r-1)})$$

(Здесь $d_{t_{(r-1)}} \hat{\Pi}_{m_{(r-1)}}(n^{(2r-3)}; t^{(r-1)})$ имеет тот же смысл, что и $d_{t_{(r)}} \hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)}; t^{(r)})$, но без учета поступлений r -вызовов), откуда и следует (3).

4°. Абсолютный приоритет с потерей. Пусть $n_i^{(r-1)} = (n_{i2}, \dots, n_{ir})$, $t_i^{(r-1)} = (t_{i2}, \dots, t_{ir})$ — $(r-1)$ -мерные вектора; $n \geq 0$, $n_{ik} \geq 0$ — целые числа; $t \geq 0$, $t_{ik} \geq 0$ ($i = 1, 2$; $k = \overline{2, r}$); $n^{(2r-1)} = (n, n_1^{(r-1)}, n_2^{(r-1)})$, $t^{(2r-1)} = (t, t_1^{(r-1)}, t_2^{(r-1)})$. Определим события: $V(n^{(2r-2)}; t^{(2r-2)}) = \{ \text{обслуживания } n_{1k} \text{ } k\text{-вызовов прерваны; суммарное время пребывания этих } n_{1k} \text{ } k\text{-вызовов на приборе } < t_{1k}; n_{2k} \text{ } k\text{-вызовов закончили обслуживание без прерываний и их суммарное время обслуживания } < t_{2k} (k = \overline{2, r}) \}$. Здесь $n^{(2r-2)} = (n_1^{(r-1)}, n_2^{(r-1)})$, $t^{(2r-2)} = (t_1^{(r-1)}, t_2^{(r-1)})$. $\hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)}, t^{(2r-1)})$ есть вер. осуществления события $V(n^{(2r-2)}, t^{(2r-2)}) \cap S(n, t)$ за п. з. $\pi(m_{(r)})$: $d_{t_{(2r-1)}}^+ = \left(\prod_{k=2}^r d_{t_{1k}}^+ \right) \left(\prod_{k=2}^r d_{t_{2k}}^+ \right) dt$. Здесь $\prod_{k=2}^r d_{t_{1k}}^+$ содержит лишь те сомножители $d_{t_{1k}}$, у которых $n_{1k} > 0$.

Очевидно, $d_{t_{(2r-1)}}^+ \hat{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)}, t^{(2r-1)})$ при $n_{1k} + n_{2k} = 0$ ($k = \overline{2, r}$) распадается на произведение той же вер. без учета поступления k -вызовов и $\exp\{-a_k t_{(r)}\}$, где $t_{(m)} = t + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=2}^m t_{ij}$ ($m = \overline{1, r}$), $\sum_{j=2}^1 \equiv 0$. Аналогичное утверждение справедливо при $n = 0$. Поэтому предполагаем $n_{1k} + n_{2k} > 0$ ($k = \overline{2, r}$) и $n > 0$.

При заданных $n_i^{(r-1)}$, $n_{1k} + n_{2k} > 0$ ($i = 1, 2$; $k = \overline{2, r}$) и целом $m_{(r)} > 0$ система уравнений

$$0 < m_{1k} + m_{2k} + m_{(k-1)} = m_{(k)} + n_{1k}; \quad m_{1k} \leq n_{1k} \leq m_{(k-1)}; \quad 0 \leq m_{2k} \leq n_{2k} \quad (k = \overline{2, r});$$

$$m_{(1)} \leq n \tag{5}$$

определяет шаг за шагом от $k=r$ до $k=2$ множества $U_k = U_k(m_{(k-1)}, m_{1k}, m_{2k})$ решений $(m_{(k-1)}, m_{1k}, m_{2k})$ в целых неотрицательных числах. Выделяем множество решений $U(m_{(k-1)}, m_{1k}, m_{2k}; k = \overline{2, r})$ системы уравнений (5).

Теорема 3. При $n_{1k} + n_{2k} > 0$ ($k = \overline{2, r}$), $n > 0$, $m_{(k-1)} > n_{1k}$, $B_l(+0) = 0$ ($l = 1, r$) имеем:

$$\sigma^{m(r)} d_{t^{(2r-1)}}^+ \bar{\Pi}_{m(r)}(n^{(2r-1)}; t^{(2r-1)}) = \exp\{-\sigma t^{(r)}\} \sum_{j=2}^r \prod_{i=2}^j \left\{ \frac{a_j^{n_{1j}+n_{2j}} t_{(j)}^{n_{1j}+n_{2j}-m_{1j}-m_{2j}}}{(n_{1j}-m_{1j})!(n_{2j}-m_{2j})!} \right\} \quad (6)$$

$$d_{t_{1j}} \left[\int_0^{t_{1j}} [1 - B_j(u)] du \right]^{n_{1j}} d_{t_{2j}} [B_j(t_{2j})]^{n_{2j}} \left\{ \frac{m_{(j-1)} - n_{1j} + m_{1j}}{m_{(j-1)}} \frac{t_{(j-1)}}{t_{(j)}} + \sum_{i=1}^2 + \frac{m_{1j}}{n_{1j}} \frac{t_{1j}}{t_{(j)}} \right\} \cdot \frac{m_{(j)}!}{(m_{(j-1)} - n_{1j})! m_{1j} m_{2j}!} a_1^{m_1} d_t \Pi_{m(1)}(0, n, t),$$

где n_{1j} и t_{1j} одновременно равны или отличны от нуля. В первом случае для любой монотонно возрастающей функции $A(t)$. $A(+0) = 0$, полагаем $d_{t_{1j}} [A(t)]^{n_{1j}} \equiv 1$.

Доказательство. Обозначим $(\sigma_k = a_1 + \dots + a_k, \sigma_0 = 0, \sigma = \sigma_r)$

$$C_{1k}(t) = \int_0^t e^{-\sigma_k - 1^k} [1 - B_k(u)] du; \quad C_{2k}(t) = \int_0^t e^{-\sigma_k - 1^k} dB_k(u).$$

Каждый k -вызов ($k = \overline{2, r}$) теряется с вер. $p_{1k} = 1 - \int_0^\infty e^{-\sigma_k - 1^k} dB_k(t)$

и завершает обслуживание без прерывания с вер. $p_{2k} = 1 - p_{1k}$. В первом случае k -вызов ($k = \overline{2, r}$) назовем 1, k -вызовом, во втором — 2, k -вызовом. j, k -вызовы образуют пуассоновский поток с параметром $a_k p_{jk}$, причем данные потоки независимы.

Рассмотрим СМО, описанную в пункте 1°, где входящими потоками являются потоки 1, k -вызовов и 2, k -вызовов: $q_1 = 2, q_2 = 1$. $B_1^{(1)}(t) = p_{1k}^{-1} \sigma_{k-1} C_{1k}(t)$, $B_1^{(2)}(t) = \Pi_{k-1}(t)$, $B_2^{(1)}(t) = p_{2k}^{-1} C_{2k}(t)$, $t_{11} = t_1, t_{21} = t_2, t_{12} = y$. Воспользовавшись (1) и формулой на стр. 9 работы (2), найдем вер. $R_{(m, m^{(2)})}^{(k)}(n^{(2)}; y, t^{(2)})$, где $m^{(2)} = (m_1, m_2)$, $n^{(2)} = (n_1, n_2)$, $t^{(2)} = (t_1, t_2)$, осу-

ществления события $S(n^{(2)}; t^{(2)})$ за п. з. $\pi(x; m^{(2)})$ при условии, что время загрузки есть сумма m независимых 2-фаз 1, k -вызовов. Пусть

$$t = y + t_1 + t_2; \quad m + m_1 + m_2 > 0; \quad m_i \leq n_i \quad (i = 1, 2); \quad d_{t^{(2)}}^+ = \prod_{k=1}^2 d_{t_k}.$$

Тогда при $m + n_1 = 0, m_2 > 0, t_2 > 0$ имеем $m_1 = 0$ и $d_{t_1} R_{(m, m^{(2)})}^{(k)}(n^{(2)}; y; t^{(2)}) =$

$$= \exp\{-a_k t_2\} t_2^{n_2 - m_2} \frac{m_2}{n_2} \frac{(a_k p_{2k})^{n_2 - m_2}}{(n_2 - m_2)!} d_{t_2} [p_{2k}^{-1} C_{2k}(t_2)]^{n_2}.$$

При $m + n_1 > 0, y > 0$ имеем (δ_{mn} — символ Кронекера)

$$d_y d_{t^{(2)}}^+ R_{(m, m^{(2)})}^{(k)}(n^{(2)}; y; t^{(2)}) = \exp\{-a_k \bar{t}\} \bar{t}^{n_1 + n_2 - m_1 - m_2 - 1} \sigma_k^{n_1 - 1} \left\{ \delta_{m_0} \left[\frac{m_1}{n_1} (y + t_1) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - \delta_{n_1, 0}) \frac{m_2}{n_2} t_2 \left\{ d_y [\Pi_{k-1}(y)]_0^{n_1} + (1 - \delta_{m_0}) \int_{x=0}^y \left[x + (1 - \delta_{n_1, 0}) \frac{m_1}{n_1} (y - x + t_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. (1 - \delta_{n_1, 0}) \frac{m_2}{n_2} t_2 \right\} d_y [\Pi_{k-1}(y-x)]_0^{n_1} d_x [\Pi_{k-1}(x)]_0^m \right\} \\
& \left\{ \prod_{i=1}^2 \frac{(a_k p_{ik})^{n_i - m_i}}{(n_i - m_i)!} d_{t_i} [p_{ik}^{-1} C_{ik}(t_i)]_0^{n_i} \right\} = \quad (7) \\
& \exp \left\{ -a_k \bar{t} \right\} \sigma_{k-1}^{n_1} \frac{n_i + m_1}{m + n_1} \frac{y}{\bar{t}} + \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{n_i} \frac{t_i}{\bar{t}} \left\} d_y [\Pi_{k-1}(y)]_0^{m+n_1} \times \\
& \times \left\{ \prod_{i=1}^2 \frac{(a_k p_{ik} \bar{t})^{n_i - m_i}}{(n_i - m_i)!} d_{t_i} [p_{ik}^{-1} C_{ik}(t_i)]_0^{n_i} \right\}.
\end{aligned}$$

Вернемся к нашей системе, предположим прекращается доступ $\overline{m+1, r}$ -вызовов в систему и вер. $d_{i(2m-1)}^+ \bar{\Pi}(n^{(2m-1)}; t^{(2m-1)})$ имеет тот же смысл, что и вер. $d_{i(2r-1)}^+ \bar{\Pi}(n^{(2r-1)}; t^{(2r-1)})$, но в системе с первыми m входящими потоками. Составим рекуррентные уравнения, связывающие эти вер. при $m=k$ и $m=k-1$. Пусть $m_{(k)}$ — целое положительное число. Принимая во внимание, что число i, j -вызовов ($i=1, 2; j=\overline{1, k-1}$), обслуженных за п. з. типа π_{k-1} в п. з. системы (при $m=k$), иницированном $m_{(k)}$ $1, k$ -вызовами, и суммарная длительность обслуживания этих i, j -вызовов зависит лишь от длины данных п. з. типа π_{k-1} , то на основе (7) находим

$$\begin{aligned}
\sigma_{k-1}^{m_{(k)}} d_{i(2k-1)}^+ \bar{\Pi}_{m_{(k)}}(n^{(2k-1)}; t^{(2k-1)}) & = \exp \left\{ -a_k t_{(k)} \right\} \sum_{U_k} \frac{a_k^{n_{1k} + n_{2k} m_{(k)}}}{(m_{(k-1)} - n_{1k})! m_{1k}! m_{2k}!} \\
& \times \left\{ \frac{m_{(k-1)} - n_{1k} + m_{1k}}{m_{(k-1)}} \frac{t_{(k-1)}}{t_{(k)}} + \sum_{i=1}^2 \frac{m_{ik}}{n_{ik}} \frac{t_{ik}}{t_{(k)}} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^2 \frac{t_{i(k)}^{n_{ik} + m_{ik}}}{(n_{ik} - m_{ik})!} \times \right. \\
& \left. \times d_{t_{ik}} [C_{ik}(t_{ik})]_0^{n_{ik}} \right\} \cdot \sigma_{(k-1)}^{m_{(k-1)}} d_{i(2k-3)}^+ \bar{\Pi}_{m_{(k-1)}}(n^{(2k-3)}; t^{(2k-3)}). \quad (8)
\end{aligned}$$

Очевидно, рекуррентные соотношения (8) приводят к решению

$$\begin{aligned}
\sigma_{(r)}^{m_{(r)}} d_{i(2r-1)}^+ \bar{\Pi}_{m_{(r)}}(n^{(2r-1)}; t^{(2r-1)}) & = \exp \left\{ -\sum_{i=1}^r a_i t_{(i)} \right\} \times \\
& \times \sum_{U^r} \left[\prod_{j=1}^r \left\{ \prod_{i=1}^2 \frac{a_{ij}^{n_{ij}} t_{ij}^{n_{ij} - m_{ij}}}{(n_{ij} - m_{ij})!} d_{t_{ij}} [C_{ij}(t_{ij})]_0^{n_{ij}} \right\} \times \left\{ \frac{m_{(j-1)} - n_{1j} + m_{1j}}{m_{(j-1)}} \frac{t_{(j-1)}}{t_{(j)}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{i=1}^2 \frac{m_{ij}}{n_{ij}} \frac{t_{ij}}{t_{(j)}} \right\} \frac{m_{(j)}!}{(m_{(j-1)} - n_{1j})! m_{1j}! m_{2j}!} \right] a_{i(1)}^{n_{i(1)}} d_{i(1)} \Pi_{m_{(1)}}(0, n, t), \quad (9)
\end{aligned}$$

где $\Pi_{m_{(1)}}(0, n, t)$ задается теоремой 1. Упрощая (9), получаем (6).

5°. Абсолютный приоритет с обслуживанием заново. Пусть

$n_i^{(r-1)} = (n_{i2}, \dots, n_{ir})$ и $t_i^{(r-1)} = (t_{i2}, \dots, t_{ir})$ — $(r-1)$ -мерные вектора; $n \geq 0$, $n_{ik} \geq 0$ — целые числа; $t \geq 0$, $t_{ik} \geq 0$ ($i=1, 2; k=\overline{2, r}$); $n^{(2r-1)} = (n_1^{(r-1)}, (n, n_2^{(r-1)}))$; $t^{(2r-1)} = (t_1^{(r-1)}, (t, t_2^{(r-1)}))$. Определим событие: $W(n_i^{(r-1)}; t_i^{(r-1)}; i=1, 2) = \{n_{2k} \text{ } k\text{-вызовов обслужено; их длительности обслуживания прерывались } n_{1k} \text{ раз суммарная длительность промежутков обслуживания этих } n_{2k} \text{ } k\text{-вызовов, завершающихся прерыванием обслуживания, } < t_{1k}; \text{ суммарная длительность промежутков обслуживания этих } n_{2k} \text{ } k\text{-вызовов, завершающихся уходом вызова из системы, } < t_{2k} \text{ (} k=\overline{2, r})\}$. Пусть $\Pi_{m(r)}(n^{(2r-1)}; t^{(2r-1)})$ есть вер. осуществления события $S(n, t) \cap W(n_i^{(r-1)}; t_i^{(r-1)}; i=1, 2)$ за п. з. $\pi(m(r))$, инициированный $m(r)$ штук вызовами.

Если для некоторого k $n_{2k} = 0$ ($k=\overline{2, r}$), то $n_{1k} = 0$, и аналогично предыдущим случаям предполагаем: $n_{2k} > 0, n > 0$.

При заданных $n_i^{(r-1)}, n_{2k} > 0, n > 0$ ($i=1, 2; k=\overline{2, r}$) и целом $m(r) > 0$ система уравнений $0 < m_{1k} + \dots + m_{n_{1k}+1k} + m_{(k-1)} = m_{(k)} + n_{1k}$, $r_{1k} + \dots + r_{n_{1k}+1k} = n_{2k}; m_{(1)} \leq n$;

$$0 \cdot r_{1k} + 1 \cdot r_{2k} + \dots + n_{1k} \cdot r_{n_{1k}+1k} = n_{2k} < m_{(k-1)}; 0 < m_{jk} < r_{jk} \\ (j = \overline{1, n_{1k}+1}; k = \overline{2, r}) \quad (10)$$

определяет шаг за шагом от $k=r$ до $k=2$ множества $U_k = U_k(m_{(k-1)}; m_k^{(n_{1k}+1)}, r_k^{(n_{1k}+1)})$, где $m_k^{(n_{1k}+1)} = (m_{1k}, \dots, m_{n_{1k}+1k})$, $r_k^{(n_{1k}+1)} = (r_{1k}, \dots, r_{n_{1k}+1k})$, решений $(m_{(k-1)}, m_k^{(n_{1k}+1)}, r_k^{(n_{1k}+1)})$ в целых неотрицательных числах.

Выделяем множество решений $U(m_{(k-1)}, m_k^{(n_{1k}+1)}, r_k^{(n_{1k}+1)}; k=\overline{2, r})$ системы уравнений (10). Обозначим

$$v_{1k} = 0 \cdot m_{1k} + 1 \cdot m_{2k} + \dots + n_{1k} \cdot m_{n_{1k}+1k}; v_{2k} = m_{1k} + \dots + m_{n_{1k}+1k}; \\ t_{(k)} = t + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=2}^k t_{ij} \quad (k = \overline{2, r}).$$

Теорема 4. При $n_{2k} > 0, n_{1k} \geq 0, n > 0, m_{(k-1)} \geq n_{1k}, B_i(+0) = 0$ ($k = \overline{2, r}; i = \overline{1, r}$) имеем

$$\sigma^{m(r)} d_{(2r-1)} \Pi_{m(r)}(n^{(2r-1)}; t^{(2r-1)}) = \\ = \exp\{-\sigma \cdot t_{(r)}\} \sum_{j=2}^r \left\{ \prod_{k=1}^{n_{1j}+1} \frac{a_j^{n_{1j}+1} t_{(j)}^{-m_{kj}}}{(r_{kj} - m_{kj})!} \right\} \times \\ \times d_{(j)} \left| \int_0^{t_{(j)}} |1 - B_j(u)| du \right|^{n_{1j}} d_{(2j)} [B_j(t_{2j})]^{n_{2j}} \left\{ \frac{m_{(j-1)} - n_{1j} + v_{2j} t_{(j-1)}}{m_{(j-1)}} \frac{t_{(j-1)}}{t_{(j)}} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 \frac{v_{ij} t_{ij}}{n_{1j} t_{(j)}} \right\} \frac{m_{(j)}!}{(m_{(j-1)} - n_{1j})! m_{1j}! \dots m_{n_{1j}+1j}!} \Big| a_1^{m(r)} d_t \Pi_{m(r)}(0, n, t). \quad (11)$$

Доказательство. Обслуживание каждого k -вызова прерывается i раз ($i \geq 0; k = \overline{2, r}$) с вер. $p_{2k} p_{1k}^i$. k -вызов ($k = \overline{2, r}$), обслужи-

ванне которого прерывается l раз ($l=0, \overline{n_{1k}}$, называем l, k -вызовом и называем $n_{1k}+1, k$ -вызовом, если число прерываний его обслуживания $>n_{1k}$. Поток i, k -вызовов ($l=0, \overline{n_{1k}+1}; k=2, r$) независимы.

Рассмотрим СМО, описанную в пункте 1°, где входящими потоками служат потоки l, k -вызовов ($l=1, \overline{n_{1k}+2}; k=2, r$); $q_1=1$; $q_j=3$ ($j=2, \overline{n_{1k}+1}$); $q_{n_{1k}+2}=1$; $B_1^{(1)}(t)=p_{2k}^{-1}C_{2k}(t)$; $B_j^{(1)}(t)=p_{2k}^{-1}C_{2k}(t)$; $B_j^{(2)}(t)=[p_{1k}^{-1}C_{1k}(t)]_0^{j-1}$; $B_j^{(3)}(t)=[\Pi_{k-1}(t)]_0^{j-1}$; $B_{n_{1k}+2}^{(1)}(t)=p_{2k}^{-1}C_{2k}(t) \cdot$
 $\cdot \left[\sum_{j=n_{1k}+1}^{\infty} p_{k-1}^{j-1} p_{1k}^{-j} [C_{1k}(t) \cdot \Pi_{k-1}(t)]_0^j \right]$.

Обозначим через $\Lambda(r^{(n_{1k}+1)}; y; t^{(2)})$, где $r^{(n_{1k}+1)}=(r_1, \dots, r_{n_{1k}+1})$, $t^{(2)}=(t_1, t_2)$, следующее событие: $\{r_i, l, k$ -вызовов обслужено; суммарная длительность j -фаз и 3 -фаз обслуженных k -вызовов $<t_j$ и $<y$ соответственно; не поступил ни один $n_{1k}+1, k$ -вызов ($l=0, \overline{n_{1k}}; j=1, 2)$. Пусть $R_{(m, m^{(n_{1k}+1)})}^{(k)}(r^{(n_{1k}+1)}; y; t^{(2)})$, где $m^{(n_{1k}+1)}=(m_1, \dots, m_{n_{1k}+1})$ есть вер. осуществления события $\Lambda(r^{(n_{1k}+1)}; y; t^{(2)})$ в п. з. $\pi(x; m^{(n_{1k}+1)})$, со временем задержки x , представляющей из себя сумму m независимых 3 -фаз $2, k$ -вызова, и m_j нетронутых обслуживанием j, k -вызовов. На основе теоремы 1 заключаем ($t=y+t_1+t_2$)

$$d_y d_{t^{(2)}} R_{(m, m^{(n_{1k}+1)})}^{(k)}(r^{(n_{1k}+1)}; y; t^{(2)}) = \exp\{-a_k t\} t^{n_{2k}-n_{2k-1}-n_{1k}} \times \\ \times \left\{ \prod_{j=1}^{n_{1k}+1} \frac{(a_k p_{2k} p_{1k}^{j-1})^{r_j - m_j}}{(r_j - m_j)!} \right\} \left\{ \sum_{j=0}^{n_{1k}+1} J_j^{(k)} \right\},$$

где (чтобы не загромождать запись, положили $y > 0, t_1 > 0, n_{1k} > 0, m > 0$)

$$J_0^{(k)} = \int_{x=0}^y x d_x [\Pi_{k-1}(x)]_0^m d_y [\Pi_{k-1}(y-x)]_0^{n_{1k}} \prod_{j=1}^2 d_{t_j} [p_{jk}^{-1} C_{jk}(t_j)]_0^{n_{1k}}; \\ J_1^{(k)} = \frac{m_{1k}}{r_{1k}} \left\{ (1 - \delta_{i0}) \left[\int_{x=0}^y x d_x [\Pi_{k-1}(x)]_0^{(i-1)r_i} d_y [\Pi_{k-1}(y-x)]_0^{m+n_{1k}-(i-1)r_i} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \prod_{j=1}^2 d_{t_j} [p_{jk}^{-1} C_{jk}(t_j)]_0^{n_{1k}} + \int_{z=0}^{t_1} z d_z [p_{1k}^{-1} C_{1k}(z)]_0^{(i-1)r_i} d_{t_1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times [p_{1k}^{-1} C_{1k}(t_1-z)]_0^{n_{1k}-(i-1)r_i} d_y [\Pi_{k-1}(y)]_0^{m+n_{1k}} d_{t_2} [p_{2k}^{-1} C_{2k}(t_2)]_0^{n_{2k}} \right] + \right. \\ \left. \int_{z=0}^{t_2} z d_z [p_{2k}^{-1} C_{2k}(t)]_0^{r_i} d_{t_2} [p_{2k}^{-1} C_{2k}(t_2-z)]_0^{n_{2k}-r_i} d_y [\Pi_{k-1}(y)]_0^{m+n_{1k}} d_{t_1} [p_{1k}^{-1} C_{1k}(t_1)]_0^{n_{1k}} \right\}.$$

Следовательно, используя формулу из работы (1), находим

$$d_y d_{t^{(2)}} R_{(m, m^{(n_{1k}+1))}^{(k)}(r^{(n_{1k}+1)}, y; t^{(2)}) = \exp[-a_k t] t^{n_{2k} - v_{2k} \sigma_{k-1}^{n_{1k}}} d_y |\Pi_{k-1}(y)|_0^{m - n_{1k}}.$$

$$\left\{ \prod_{j=1}^{n_{1k}+1} \frac{a_k \rho_{2k} \rho_{1k}^{j-1}}{(r_j - m_j)!} \right\} \left\{ \frac{m + v_{1k} y}{m + n_{1k} t} + \frac{v_{1k} t_{1k}}{n_{1k} t} + \frac{v_{2k} t_{2k}}{n_{2k} t} \right\} \prod_{l=1}^2 d_{t_l} [p_{1k}^{-1} C_{1k}(t_l)]_0^{n_{1k}-r_l}.$$

Аналогично (8) и в данном случае получаем рекуррентные уравнения

$$\begin{aligned} \sigma_k^{m(k)} d_{t^{(2k-1)}} \bar{\Pi}_{m(k)}(n^{(2k-1)}; t^{(2k-1)}) &= \exp[-a_k t^{(k)}] \sum \frac{a_k^{n_{2k} m_{1k}}}{\sigma_k^{(m_{1k}-1) - n_{1k}} |m_{1k}| \dots |m_{m_{1k}+1k}|} \\ &\times \left\{ \frac{m_{(k-1)} - n_{1k} + v_{1k} t^{(k-1)}}{m_{(k-1)}} \frac{1}{t^{(k)}} + \sum_{l=1}^2 \frac{v_{1k} t_{1k}}{n_{1k} t^{(k)}} \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{n_{1k}+1} \frac{t_{jk}^{r_{jk} - m_{jk}}}{(r_{jk} - m_{jk})!} \right\} \left\{ \prod_{l=1}^2 \right. \\ &\times \left. d_{t_{lk}} [C_{1k}(t_{lk})]_0^{n_{1k}} \right\} \sigma_{k-1}^{m(k-1)} d_{t^{(2k-3)}} \bar{\Pi}_{m(k-1)}(n^{(2k-3)}; t^{(2k-3)}), \end{aligned}$$

которые, разрешаясь аналогично (9), влекут за собой (11).

Вычислительный центр Академии наук
Армянской ССР и Ереванского
государственного университета

Է. Ա. ԴԱՆԻՍԵԱՆ

Ընդհատումներով սպասարկման միալար սիստեմների զբաղվածության պարբերությունների մասին

Դիտարկվում է սպասումով, r ներմտնող Պուասոնի հոսքերով և սպասարկման ժամանակների ընդհանուր բաշխումներով միալար զանգվածային սպասարկման սիստեմ, որտեղ ընդունված են բացարձակ նախապատվությունը դիսցիպլինայի հետևյալ տարրերակները՝ ընդհատված պահանջը. ա) ընդհատման պահին անմիջապես դուրս է մղվում սիստեմից, բ) հաջորդ անգամ սարք վերադառնալիս սպասարկվում է այն կետից, որտեղ ընդհատվել էր, գ) հաջորդ անգամ սարք վերադառնալիս, սպասարկվում է որպես ընդհանրապես շսպասարկված մի պահանջի i -րդ հոսքի պահանջը կանվանենք i -պահանջ:

ա) Դիցուք $n^{(r-1)} = (n_{1r}, \dots, n_{1r})$, $t^{(r-1)} = (t_{1r}, \dots, t_{1r})$ ($i=1, 2$), Սահմանենք հետևյալ պատահարները $V(n^{(r-1)}; t^{(r-1)}; i=1, 2) = |n_{1k}$ k -պահանջների սպասարկումները ընդհատված են, այդ n_{1k} k -պահանջների սարքի վրա գտնվելու գումարային ժամանակը $< t_{1k}$, n_{2k} k -պահանջներ սպասարկվել են առանց ընդհատումի, նրանց գումարային սպասարկման ժամանակը $< t_{2k}$ ($k=2, r$) | և $S(n, t) = |n$ 1-պահանջները սպասարկվել են $(0, t)$ միջակայքում: $\pi(m)$ -ը զբաղվածություն մի պարբերություն է, որի սկզբում կան m հատ պահանջներ: Դիտնված է $V(n^{(r-1)}, t^{(r-1)}; (i=1, 2))$

$\cap S(n, t)$ պատահարի տեղի ունենալու հավանականությունը $\pi(m)$ -ի ընթացքում:

բ) Դիցուք $n_i^{(r-1)} = (n_{i2}, \dots, n_{ir})$, $t_i^{(r-1)} = (t_{i2}, \dots, t_{ir})$, $n^{(2r-2)} = (n_1^{(r-1)}, n_2^{(r-1)})$ ($i = 1, 2$): Սահմանենք հետևյալ պատահարը՝ $T(n^{(2r-2)}, t^{(r-1)}) = \{n_{2k} \text{ } k\text{-պահանջ սպասարկվել են } |(), t_k) \text{ միջակայքում. } k\text{-պահանջների սպասարկումը ընդհատվել է } n_{1k} \text{ անգամ } (k = 2, r)\}$: Գտնված է $T(n^{(2r-2)}, t^{(r-1)}) \cap S(n, t)$ պատահարի տեղի ունենալու հավանականությունը $\pi(m)$ -ի ընթացքում:

գ) Դիցուք $n_i^{(r-1)} = (n_{i2}, \dots, n_{ir})$, $t_i^{(r-1)} = (t_{i2}, \dots, t_{ir})$ ($i = 1, 2$): Սահմանենք հետևյալ պատահարը՝ $W(n_i^{(r-1)}; t_i^{(r-1)}; (i = 1, 2)) = \{n_{2k} \text{ } k\text{-պահանջ սպասարկված է, նրանց սպասարկումը ընդհատվել է } n_{1k} \text{ անգամ. այն սպասարկման միջակայքների գումարային երկարությունը, որոնք ավարտվում են սպասարկման ընդհատումով, } < t_{1k} \text{ իսկ նրանցը, որոնք ավարտվում են պահանջների դուրս մղումով սխտեմից, } < t_{2k} (k = \overline{2, r})\}$: Գտնված է $W(n_i^{(r-1)}; t_i^{(r-1)}; (i = 1, 2)) \cap S(n, t)$ պատահարի տեղի ունենալու հավանականությունը $\pi(m)$ -ի ընթացքում:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Э. А. Даниелян, ДАН Арм ССР т. LXVI, № 1 (1978). ² Б. В. Гнеденко и др., Приоритетные системы обслуживания, М., МГУ, 1973.