

УДК 539.301

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Н. Акопян

К одной задаче о тепловом контакте кругового диска с  
 прямоугольными пластинами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Б. Л. Абрамяном 22/II 1978)

Определение температурного поля в деформируемых телах является вспомогательной задачей для решения задач не связанной термоупругости.

В настоящей статье рассматривается задача определения стационарного температурного поля в круговом диске и прямоугольных пластинах. При этом круговой диск соприкасается с двумя прямоугольными пластинами различных размеров по двум контактным участкам. Необходимость определения температурных режимов в таких телах возникает в связи с исследованием контактной задачи термоупругости о сжатии упругого кругового диска двумя различными прямоугольными пластинами. В обсуждаемой задаче на контактных участках имеют обычные условия теплового контакта, а на остальной части границы тел — условия смешанных типов.

Решение поставленной задачи сведено к решению системы из четырех функциональных уравнений, вырождающейся в случае двух одинаковых прямоугольников в систему из двух интегральных уравнений. Решение этих уравнений построено методом ортогональных многочленов Чебышева. Рассмотрены различные предельные случаи.

1. Пусть горячий круговой диск единичного радиуса находится в контакте с двумя горячими же прямоугольными пластинами по дугам окружности, ограничивающим углы  $(-\alpha, \alpha)$  и  $(\pi - \beta, \pi + \beta)$ , которым на внутренних границах прямоугольных пластин соответствуют интервалы  $(-a, a)$  и  $(-b, b)$  соответственно (рис. 1). При этом на участках контакта имеют место обычные условия теплового контакта. На остальных частях границ диска и внутренних сторонах прямоугольников имеет место теплообмен с внешней средой по закону Ньютона, а на наружных частях границы прямоугольных пластин поддерживается нулевая температура. В предположении стационарности

температурного поля требуется определить закон распределения температуры в контактирующих телах.

Соответствующие граничные задачи для диска и прямоугольников согласно известным теориям <sup>(1,2)</sup> будут:

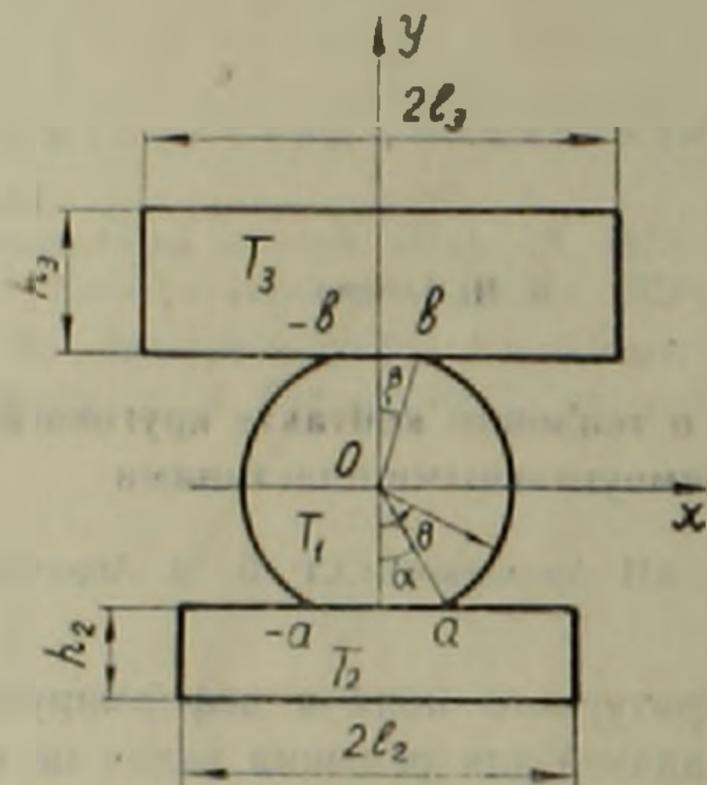


Рис. 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T_1(r, \theta) = 0 \\ T_1(1, \theta) = T_2(x, -1) \quad \text{при } |\theta| \leq \pi \text{ и } |x| \leq a \\ \left. \frac{\partial T_1(r, \theta)}{\partial r} + H_1(T_1(r, \theta) - T_0) \right|_{r=1} = 0 \quad \text{при } \alpha < \theta < \pi - \beta \text{ и } \pi + \beta < \theta < 2\pi - \alpha \\ T_1(1, \theta) = T_2(x, 1) \quad \text{при } \pi - \beta \leq \theta \leq \pi + \beta \text{ и } |x| \leq b \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T_2(x, y) = 0 \\ k_2 \frac{\partial T_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-1} = k_1 \frac{\partial T_1(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad \text{при } |\theta| \leq \pi \text{ и } |x| \leq a \end{array} \right. \quad (1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. \frac{\partial T_2(x, y)}{\partial y} + H_2(T_2(x, y) - T_0) \right|_{y=-1} = 0 \quad \text{при } l_2 > |x| > a \\ T_2(\pm l_2, y) = T_2(x, -1 - h_2) = 0 \quad \text{при } -1 - h_2 < y < -1 \text{ и } |x| < l_2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta T_3(x, y) = 0 \\ k_3 \frac{\partial T_3(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=1} = -k_1 \frac{\partial T_1(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=1} \quad \text{при } \pi - \beta < \theta < \pi + \beta \text{ и } |x| \leq b \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left. -\frac{\partial T_3(x, y)}{\partial y} + H_3(T_3(x, y) - T_0) \right|_{y=1} = 0 \quad \text{при } l_3 > x > b \\ T_3(\pm l_3, y) = T_3(x, 1 + h_3) = 0 \quad \text{при } 1 < y < 1 + h_3 \text{ и } |x| < l_3 \end{array} \right.$$

Здесь  $T_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) температуры, а  $H_i$  и  $k_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — коэффициенты теплообмена и теплопроводности диска и прямоугольных пластин соответственно,  $T_0$  — температура внешней среды, а  $2l_i$  и  $h_i$  ( $i=2, 3$ ) — размеры прямоугольников.

Для определенности предположим, что  $T_0$  четная функция. Тогда очевидно, что температурное поле будет симметричной относительно оси  $OY$  и функции  $T_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) также будут четными. Тогда решение граничных задач (1.1)–(1.3) можно представить в следующем виде:

$$T_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \cos n\theta \quad (0 \leq r \leq 1, |\theta| \leq \pi)$$

$$T_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \operatorname{ch} \mu_n y + B_n \operatorname{sh} \mu_n y] \cos \mu_n x \quad (|x| \leq l_2, -1 - h_2 \leq y \leq -1),$$

$$T_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [D_n \operatorname{ch} \mu'_n y + C_n \operatorname{sh} \mu'_n y] \cos \mu'_n x \quad (|x| \leq l_2, 1 + h_2 \leq y \leq 1),$$

где

$$\mu_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l_2}, \quad \mu'_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l_2},$$

а  $A_n, B_n, C_n, D_n$  и  $a_n$  неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Удовлетворение граничных условий приводит к соотношениям

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \operatorname{ch} \mu_n - B_n \operatorname{sh} \mu_n] \cos \mu_n x \quad (|\theta| \leq \pi, |x| \leq a)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\theta = \sum_{n=1}^{\infty} [D_n \operatorname{ch} \mu'_n + C_n \operatorname{sh} \mu'_n] \cos \mu'_n x \quad (\pi - \beta \leq \theta \leq \pi + \beta, |x| \leq b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\theta = k_{12} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n [-A_n \operatorname{sh} \mu_n + B_n \operatorname{ch} \mu_n] \cos \mu_n x \quad (|\theta| \leq \pi, |x| \leq a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \cos n\theta = -k_{13} \sum_{n=1}^{\infty} \mu'_n [D_n \operatorname{sh} \mu'_n + C_n \operatorname{ch} \mu'_n] \cos \mu'_n x \quad (\pi - \beta \leq \theta \leq \pi + \beta, |x| \leq b)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + H_1) a_n \cos n\theta = H_1 T_0 \quad (\pi - \beta < \theta < \pi + \beta, \pi + \beta < \theta < 2\pi - \pi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n [(\mu_n + H_2 \operatorname{th} \mu_n h) \operatorname{ch} \mu_n - (\mu_n \operatorname{th} \mu_n h + H_2) \operatorname{sh} \mu_n] \cos \mu_n x = H_2 T_0 \quad (l_2 > |x| > a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n [(\mu'_n + H_3 \operatorname{th} \mu'_n h') \operatorname{ch} \mu'_n - (\mu'_n \operatorname{th} \mu'_n h' + H_3) \operatorname{sh} \mu'_n] \cos \mu'_n x = -H_3 T_0 \quad (l_2 > |x| > b)$$

где

$$k_{12} = \frac{k_1}{k_2}, \quad k_{13} = \frac{k_1}{k_3}, \quad h = 1 + h_2, \quad h' = 1 + h_3.$$

Обозначим значение выражений (1.8) в интервалах  $(-a, a)$  и  $(\pi-\beta, \pi+\beta)$  через  $2\pi\psi_1$  и  $2\pi\psi_2$  соответственно, а значения (1.9) и (1.10) — в интервалах  $|x|\leq a$  и  $|x|\leq b$  через  $\psi_3$  и  $\psi_4$  соответственно. Исходя из последнего, выразим коэффициенты  $A_n, B_n, C_n, D_n$  и  $a_n$  через функции  $\psi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), подстановка которых в соотношения (1.4)–(1.7) приводит к следующей системе функциональных уравнений:

$$\int_{-a}^a K_{11}(|x-s|)\psi_1(s)ds + \int_{-b}^b K_{12}(|x-s|)\psi_2(s)ds - \int_{-a}^a K_{13}(|x-s|)\psi_3(s)ds = f_1(x)$$

$$2\pi k_{12}\psi_1(x) - k_{12}H_1 \int_{-a}^a K_{11}(|x-s|)\psi_1(s)ds - k_{12}H_1 \int_{-b}^b K_{12}(|x-s|)\psi_2(s)ds -$$

$$(\quad) \quad (|x|\leq a)$$

$$-\psi_3(x) + H_2 \int_{-a}^a K_{12}(|x-s|)\psi_2(s)ds = f_2(x), \quad (1.11)$$

$$\int_{-a}^a K_{12}(|x-s|)\psi_1(s)ds + \int_{-b}^b K_{11}(|x-s|)\psi_2(s)ds - \int_{-b}^b K_{14}(|x-s|)\psi_4(s)ds = f_3(x),$$

$$2\pi k_{12}\psi_2(x) - k_{12}H_1 \int_{-a}^a K_{12}(|x-s|)\psi_1(s)ds - k_{12}H_1 \int_{-b}^b K_{11}(|x-s|)\psi_2(s)ds -$$

$$(\quad) \quad (|x|\leq b)$$

$$-\psi_4(x) + H_2 \int_{-b}^b K_{14}(|x-s|)\psi_4(s)ds = f_4(x)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$f_1(x) = -\frac{H_1}{2\pi} \left( \int_{-\pi+\beta}^{-\pi} + \int_{\pi}^{\pi-\beta} \right) K_{11}(|x-s|)T_0(s)ds +$$

$$+ H_2 \left( \int_{-l_1}^a + \int_a^{l_1} \right) K_{12}(|x-s|)T_0(s)ds - a_0,$$

$$f_2(x) = \frac{k_{12}H_1^2}{2\pi} \left( \int_{-\pi+\beta}^{-\pi} + \int_{\pi}^{\pi-\beta} \right) K_{11}(|x-s|)T_0(s)ds -$$

$$- H_2^2 \left( \int_{-l_1}^a + \int_a^{l_1} \right) K_{12}(|x-s|)T_0(s)ds + H_1 K_{13} a_0,$$

$$f_3(x) = -\frac{H_1}{2\pi} \left( \int_{-a}^{-a+\beta} + \int_a^{a-\beta} \right) K_{11}(|x-s|) T_0(s) ds +$$

$$+ H_3 \left( \int_{-l_1}^{-b} + \int_b^{l_2} \right) K_{14}(|x-s|) T_n(s) ds - a_0.$$

$$f_4(x) = \frac{k_{13} H_1^2}{2\pi} \left( \int_{-a}^{-a+\beta} + \int_a^{a-\beta} \right) K_{11}(|x-s|) T_n(s) ds -$$

$$- H_3^2 \left( \int_{-l_1}^{-b} + \int_b^{l_2} \right) K_{14}(|x-s|) T_0(s) ds + H_1 K_{13} a_0.$$

$$K_{11}(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n+H_1}, \quad K_{12}(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n+H_2}$$

$$K_{13}(x) = \frac{1}{l_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{ch} \mu_n \operatorname{th}(\mu_n h) - \operatorname{sh} \mu_n| \cos \mu_n x}{\mu_n |\operatorname{ch} \mu_n - \operatorname{sh} \mu_n \operatorname{th}(\mu_n h)| + H_2 |\operatorname{ch} \mu_n \operatorname{th}(\mu_n h) - \operatorname{sh} \mu_n|}$$

$$K_{14}(x) = \frac{1}{c_3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{ch} \mu_n' \operatorname{th}(\mu_n' h') - \operatorname{sh} \mu_n'| \cos \mu_n' x}{\mu_n' |\operatorname{ch} \mu_n' - \operatorname{sh} \mu_n' \operatorname{th}(\mu_n' h')| + H_3 |\operatorname{ch} \mu_n' \operatorname{th}(\mu_n' h') - \operatorname{sh} \mu_n'|}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{H_1} \int_{-a}^a \psi_1(s) ds + \frac{1}{H_2} \int_{-a+\beta}^{a-\beta} \psi_2(s) ds + \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-a}^{-a+\beta} + \int_a^{a-\beta} \right) T_0(s) ds.$$

Следует отметить, что вследствие малости контактных зон по сравнению с характерными размерами контактирующих тел при получении системы (1.11) принято  $g=x$ .

2. Приступим к изложению методики сведения системы функциональных уравнений к системе бесконечных алгебраических уравнений. С этой целью заметим, что все ядра функциональных уравнений (1.11), кроме  $K_{12}(x)$ , имеют логарифмическую особенность в нуле. Поэтому эти ядра могут быть представлены как суммы своих особых и регулярных частей:

$$K_{11}(x) = 2 \ln \frac{1}{|x|} + g_{11}(x),$$

$$K_{13}(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x|} + g_{13}(x), \quad (|x| \leq a \text{ или } |x| \leq b)$$

$$K_{11}(x) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|x|} + g_{11}(x),$$

где

$$g_{11}(x) = 2 \ln \left| \frac{x}{2 \sin x/2} \right| - 2 H_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n(n+H_1)},$$

$$q_{11}(x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4e_2} \right| - \frac{1}{e_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[c(\mu_n) + \mu_n(1-c(\mu_n))]}{\mu_n(\mu_n + H_2 c(\mu_n))} \cos \mu_n x,$$

$$q_{11}(x) = \frac{1}{\pi} \ln \left| x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4e_2} \right| - \frac{1}{e_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[c(\mu'_n) + \mu'_n(1-c(\mu'_n))]}{\mu'_n(\mu'_n + H_2 c(\mu'_n))} \cos \mu'_n x.$$

Здесь

$$C(t) = \frac{\operatorname{cht} \cdot \operatorname{th}(ht) - \operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t \cdot \operatorname{th}(ht) - \operatorname{cht}}$$

Исходя из указанного факта, разложим искомые функции  $\psi_i(x)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) в ряды по полиномам Чебышева первого рода

$$\psi_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n^{(i)} \frac{T_{2n}(x/c_i)}{\sqrt{c_i^2 - x^2}}, \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (2.1)$$

где

$$c_i = \begin{cases} a & \text{при } i = 1, 3 \\ b & \text{при } i = 2, 4 \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в систему (1.11) и используя ортогональность многочленов Чебышева, для нахождения коэффициентов разложения (2.1) известным способом получаем систему бесконечных алгебраических уравнений

$$x_m^{(i)} + \sum_{j=1}^i \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(j)} \frac{T_{m,n}^{(i,j)}}{n} = C_m^{(i)}. \quad (2.2)$$

Явные виды  $T_{m,n}^{(i,j)}$  и  $C_m^{(i)}$  здесь не приводятся.

Легко доказывается <sup>(3)</sup>, что система (2.2) квазивполне регулярна.

3. Рассмотрим некоторые частные случаи обсуждаемой задачи. Сначала предположим, что прямоугольные пластины изготовлены из одного и того же материала и имеют одинаковые размеры. В этом случае задача будет симметричной не только по отношению оси  $oy$  но и по отношению оси  $ox$ . Это означает, что  $\mu_n = \mu'_n$ ,  $h = h'$ ,  $H_2 = H_3$ ,  $k_1 = k_2$ ,  $a = b$ ,  $\psi_1(x) = \psi_2(x) = \varphi_1(x)$ ,  $\psi_3(x) = \psi_4(x) = \varphi_2(x)$ ,  $k_{11} = k_0$  и система функциональных уравнений (1.11) вырождается в следующую систему интегральных уравнений Фредгольма:

$$\int_{-a}^a R_{11}(|x-s|) \bar{\varphi}_1(s) ds - \int_{-a}^a R_{12}(|x-s|) \bar{\varphi}_2(s) ds = g_1(x) \quad (3.1)$$

$$2\pi k_0 \bar{\varphi}_1(x) - k_0 H_1 \int_{-a}^a R_{11}(|x-s|) \bar{\varphi}_1(s) ds - \varphi_2(x) +$$

$$+ H_2 \int_{-a}^a R_{12}(|x-s|) \bar{\varphi}_2(s) ds = g_2(x).$$

где

$$R_{11}(x) = 2\operatorname{Re}|\Phi(e^{2ix}, 1, H_1)|, \quad R_{12}(x) = K_{12}(x), \quad g_1(x) = f_1(x) - 2a_0,$$

$$g_2(x) = f_2(x) + 2k_0 H_1 a_0, \quad \text{а } \Phi(z, s, v) \text{ — известная функция (4).}$$

После этого в системе (3.1)  $l_2$  устремим к бесконечности, а затем и  $l_1$  и  $h_2$  одновременно устремим к бесконечности. В результате приходим к системам интегральных уравнений, описывающих задачи теплового контакта кругового диска единичного радиуса с двумя одинаковыми бесконечными полосами и полуплоскостями. Эти системы будут иметь аналогичную с (3.1) структуру, притом в первом случае

$$R_{12}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\lambda h) \cos \lambda x}{\lambda + H_2 \operatorname{th}(\lambda h)} d\lambda,$$

а во втором случае

$$R_{12}(x) = -\frac{1}{\pi} \left| \cos H_2 x \operatorname{ci}(H_2 x) + \sin H_2 x \operatorname{si}(H_2 x) \right|.$$

Здесь  $\operatorname{ci}(x)$  и  $\operatorname{si}(x)$  — известные интегральные косинус и синус (4).

В частности, в случае полуплоскостей разрешающая система имеет вид

$$2 \int_{-a}^a \operatorname{Re} \left| \Phi(e^{2i(x-s)}, 1, H_1) \bar{\varphi}_1(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left| \cos H_2(x-s) \operatorname{ci} H_2(x-s) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sin H_2(x-s) \operatorname{si} H_2(x-s) \right| \bar{\varphi}_2(s) ds = g_1(x)$$

$$2\pi k_0 \bar{\varphi}_1(x) - 2H_1 k_0 \int_{-a}^a \operatorname{Re} \left| \Phi(e^{2i(x-s)}, 1, H_1) \right| \bar{\varphi}_1(s) ds - \bar{\varphi}_2(x) -$$

$$- \frac{H_2}{\pi} \int_{-a}^a \left| \cos H_2(x-s) \operatorname{ci} H_2(x-s) + \sin H_2(x-s) \operatorname{si} H_2(x-s) \right| \bar{\varphi}_2(s) ds = g_2(x)$$

Все эти системы интегральных уравнений, так же как и система (1.11) с помощью аппарата ортогональных многочленов Чебышева первого рода приводятся к регулярным системам бесконечных алгебраических уравнений.

Автор выражает благодарность С. М. Мхитаряну за обсуждение работы.

Институт механики  
Академии наук Армянской ССР

Վ. Ն. ՀԱԿՈՐՅԱՆ

Կլոր սկավառակի և ուղղանկյուն սալերի ջերմային կոնտակտի մի խնդրի մասին

Ներկա աշխատանքում հաշվարկվում է ստացիոնար ջերմային դաշտը կլոր սկավառակում և ուղղանկյուն սալերում, երբ սկավառակը կոնտակտի մեջ է գտնվում ուղղանկյունների հետ տարբեր մեծության երկու կոնտակտային տեղամասերով: Նշված խնդիրը մաթեմատիկորեն ձևակերպվում է ֆունկցիոնալ հավասարումների սիստեմի տեսքով՝ բաղկացած շորս հավասարումներից: Այնուհետև Չերիշևի բազմանդամների հայտնի ապարատի օգնությամբ այդ սիստեմը ընկալվում է րվադիլիովին սեղույնար գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ի Ի Ր Յ Ի Ի Ն

- <sup>1</sup> Г. Карслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел, М., «Наука», 1964. <sup>2</sup> А. И. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, М., «Наука», 1966  
<sup>3</sup> Н. Х. Арутюнян, С. М. Мхитарян, ПММ, т. 36, вып. 5 (1972). <sup>4</sup> И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.