ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVI 1978 5

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Б. Т. Батикян

О точечных дифференцированиях второго и третьего порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 10/III 1978)

Пусть A —коммутативная банахова алгебра с единицей, и $M(A)$ — компактное пространство ее комплексных гомоморфизмов. Функционал $\psi \in A^*$ называется точечным дифференцированием в точке $\varphi \in M(A)$, если $\psi(fg) = \psi(f)\varphi(g) + \psi(g)\varphi(f)$ для любых $f, g \in A$. Если J—максимальный идеал в алгебре A, соответствующий гомоморфизму φ, то нетривиальное точечное дифференцирование в точке φ существует тогда и только тогда, когда $\overline{J^2} \neq J$. Другими словами, пространство $\Omega(A, \varphi)$ всех точечных дифференцирований на A в точке φ изоморфно фактор-пространству $J/\overline{J^2}$ (см. ([1])).

В настоящей заметке изучаются точечные дифференцирования высших порядков, возникающие при продолжении точечного дифференцирования (первого порядка) на алгебру A с ее подалгебры коразмерности 1. Все результаты приводятся без доказательств.

1. Если ψ —нетривиальное точечное дифференцирование на A, то $B = \ker \psi$ образует замкнутую подалгебру в A коразмерности 1. При этом каждый комплексный гомоморфизм алгебры B можно единственным образом продолжить до гомоморфизма алгебры A, так что компакты $M(A)$ и $M(B)$ оказываются гомеоморфными ([2]).

В связи с этим естественно возникает вопрос: всякое ли точечное дифференцирование на B может быть продолжено до точечного дифференцирования на A?

Теорема 1. *Пусть* $\psi \in \Omega(A, \varphi)$, $B = \ker \psi$ *и* $\Phi \in \Omega(B, \theta)$. *Если* $\theta \neq \varphi/B$, *то* Φ *допускает единственное продолжение до точечного дифференцирования на* A.

Предположим теперь, что $\theta = \varphi/B$. В этом случае Φ продолжается на алгебру A либо как точечное дифференцирование второго порядка в точке φ относительно ψ, т. е. для любых $f, g \in A$

$$\Phi(fg) = \Phi(f)\varphi(g) + \Phi(g)\varphi(f) + \psi(f)\psi(g), \tag{1}$$

либо как смешанное точечное дифференцирование второго порядка, т. е. найдется такое $\chi\in\Omega(A,\varphi)$, причем $\ker\chi\neq\ker\psi$, что

$$\Phi(fg)=\Phi(f)\varphi(g)+\Phi(g)\varphi(f)+\psi(f)\chi(g)+\psi(g)\chi(f),$$

либо как точечное дифференцирование третьего порядка, т. е. существует точечное дифференцирование второго порядка Ψ, удовлетворяющее равенству (1), и такое, что

$$\Phi(fg)=\Phi(f)\varphi(g)+\Phi(g)\varphi(f)+\psi(f)\Psi(g)+\psi(g)\Psi(f).$$

При этом вид функционала Φ целиком определяется его поведением на алгебре B и не зависит от способа продолжения.

Положим $I=\{f\in B:\varphi(f)=0\}$ и рассмотрим следующую цепочку замкнутых идеалов банаховой алгебры A

$$\overline{I^2}\subset\overline{I^2+J^3}\subset\overline{IJ}\subset\overline{J^2}\subset I\subset J.$$

Теорема 2. *Пусть A—коммутативная банахова алгебра, и $\psi\in\Omega(A,\varphi)$. Для того, чтобы на алгебре A в точке φ относительно ψ существовало нетривиальное a) точечное дифференцирование второго порядка, b) смешанное точечное дифференцирование второго порядка, c) точечное дифференцирование третьего порядка необходимо и достаточно, чтобы, соответственно,*

$$a')\ \overline{J^2}\neq\overline{IJ},\quad b')\ \overline{IJ}\neq\overline{I^2+J^3},\quad c')\ \overline{I^2+J^3}\neq\overline{I^2}.$$

2. Пусть $M(n, \mathbf{C})$ обозначает алгебру всех матриц n-го порядка над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Выделим в $M(3, \mathbf{C})$ коммутативную подалгебру L_1, состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что отображение $\varphi: x\to\alpha$ является гомоморфизмом L_1 в поле $\mathbf{C}$, функционал $\psi: x\to\beta$ принадлежит $\Omega(L_1,\varphi)$, а $\Phi_1: x\to\gamma$ является точечным дифференцированием второго порядка.

Аналогично, если через L_2 обозначить подалгебру в $M(4, \mathbf{C})$, содержащую все матрицы вида

$$\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta\\ 0 & \alpha & 0 & \gamma\\ 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix},$$

то $\Phi_2: x\to\delta$—смешанное точечное дифференцирование второго порядка на L_2, и, наконец, если

$$L_3=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta\\ 0 & \alpha & \beta & \gamma\\ 0 & 0 & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}\right\},$$

то отображение $\Phi_3 : x \to \xi$ есть точечное дифференцирование третьего порядка на L_3.

Оказывается, что всякое точечное дифференцирование второго или третьего порядка фактически сводится к соответствующему функционалу Φ_i.

Пусть A — коммутативная банахова алгебра, $\psi \in \Omega(A, \varphi)$, $B = \ker\psi$, и пусть функционал $\Phi \in A^*$ таков, что $\Phi|B \in \Omega(B, \varphi|B)$. Положим $D = B \cap \ker\Phi$ и $I_0 = \{g \in D : gA \subset D\}$. Ясно, что I_0 — замкнутый идеал в A, причем $\dim A/I_0 \leq 4$. Обозначим через τ естественный эпиморфизм алгебры A на A/I_0 и каждому элементу $f \in A$ поставим в соответствие оператор T_f, действующий на A/I_0 по следующему правилу: $T_f\tau(g) = \tau(fg)$. Таким образом, функционал Φ естественно индуцирует непрерывное конечномерное представление $\pi_\Phi : f \to T_f$ алгебры A (см. (³)).

Теорема 3. *Для того чтобы функционал Φ являлся*
a) точечным дифференцированием второго порядка,
b) смешанным точечным дифференцированием второго порядка,
c) точечным дифференцированием третьего порядка необходимо и достаточно, чтобы, соответственно, a′) $\pi_\Phi(A) = L_1$, b′) $\pi_\Phi(A) = L_2$, c′) $\pi_\Phi(A) = L_3$.

При этом соответствующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\pi_\Phi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & & L \arrow[dl, "\Phi_i"] \\
& \mathbf{C} &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

3. Пусть теперь A есть равномерная алгебра непрерывных функций, определенных на компактном пространстве X.

Как известно, компакт X гомеоморфно вкладывается в $M(A)$ и все функции из A непрерывно продолжаются на пространство $M(A)$. Представляющей мерой гомоморфизма $\varphi \in M(A)$ называется такая положительная борелевская мера μ на X, что $\varphi(f) = \int f d\mu$ для любого $f \in A$. Слабо* замыкание алгебры A в пространстве $L^\infty(\mu)$ обозначается через $H^\infty(\mu)$.

Каждый функционал $\psi \in \Omega(A, \varphi)$ допускает интегральное представление, обобщающее обычную формулу Коши (⁴). Мы приводим аналогичный результат для точечных дифференцирований высших порядков, ограничиваясь при этом случаем дифференцирования второго порядка.

Теорема 4. *Пусть A — равномерная алгебра на X, $\psi \in \Omega(A, \varphi)$ и Φ — точечное дифференцирование второго порядка в точке φ относительно ψ. Если $\|\Phi\| = \|\psi\|^2$, то найдется такая представляющая мера μ точки φ и такая функция $G \in H^\infty(\mu)$, причем $|G| = 1$ почти всюду на X по мере μ, что*

$$\psi(f) = \|\psi\| \int f \overline{G} d\mu \tag{2}$$

и

$$\Phi(f) = \| \Phi \| \int f \overline{G}^2 d\mu \qquad (3)$$

Обратно, если выполняются равенства (2) *и* (3), *то* $\| \Phi \| = \| \psi \|^2$

Если гомоморфизм φ обладает единственной представляющей мерой, и пространство $\Omega(A, \varphi)$ — нетривиально, то в точке φ будут существовать дифференцирования всех порядков (^{5}). Как показывает приводимый ниже пример, в общем случае это уже не так.

Пример. Пусть равномерная алгебра B_1, реализованная на компакте Y, и точка $\xi_0 \in M(B_1) \setminus Y$ таковы, что $\Omega(B_1, \xi_0) = 0$. Обозначим далее через Δ^2 единичный полидиск в пространстве $\mathbf{C}^2$, и через B_2 — алгебру всех непрерывных на Δ^2 и голоморфных внутри Δ^2 функций. Пусть A — совокупность непрерывных на $\Delta^2 \times Y$ функций $f(z_1, z_2, y)$, удовлетворяющих условиям:

a) $f(z_1, z_2, \bar{y}) \in B_2$ при любом фиксированном $\bar{y} \in Y$;

b) функции $f(0, 0, y)$, $\dfrac{\partial f(0, 0, y)}{\partial z_1}$, $\dfrac{\partial f(0, 0, y)}{\partial z_2}$ и $\dfrac{\partial^2 f(0, 0, y)}{\partial z_1^2}$ принадлежат B_1.

Множество A образует равномерную алгебру на $\Delta^2 \times Y$, причем $M(A) = \Delta^2 \times Y \cup \{(0, 0)\} \times M(B_1)$ (^{6}). Если $\varphi_0 = (0, 0, \xi_0)$, то 1) пространство $\Omega(A, \varphi_0)$ — двумерно; 2) функционалы $\psi_1 : f \to \dfrac{\partial f(0, 0, \xi_0)}{\partial z_1}$ и $\psi_2 : f \to \dfrac{\partial f(0, 0, \xi_0)}{\partial z_2}$ принадлежат $\Omega(A, \varphi_0)$, причем $\Phi : f \to \dfrac{\partial^2 f(0, 0, \xi_0)}{\partial z_1^2}$ есть точечное дифференцирование второго порядка относительно ψ_1, а относительно ψ_2 не существует такого дифференцирования; 3) в точке φ_0 не существует ни смешанных точечных дифференцирований, ни точечных дифференцирований третьего порядка; 4) в каждой точке множества $\{(0, 0)\} \times Y$ существуют всевозможные точечные дифференцирования всех порядков.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Թ. ԲԱՏԻԿՅԱՆ

Երկրորդ և երրորդ կարգի կետային ածանցյալների մասին

Դիցուք A-ն միավորով օժտված կոմուտատիվ բանախի հանրահաշիվ է և M(A)-ն այդ հանրահաշվի մաքսիմալ իդեալների տարածությունն է։ ψ գծային ֆունկցիոնալը կոչվում է առաջին կարգի կետային ածանցյալ, եթե գոյություն ունի այնպիսի $\varphi \in M(A)$, որ $\psi(fg) = \psi(f)\varphi(g) + \psi(g)\varphi(f)$ բոլոր f, g էլեմենտների համար A հանրահաշվից։

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում են φ ֆունկցիոնալի հետ ասոցիացված բարձր կարգի կետային ածանցյալները։ Գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ այդպիսի ածանցյալների գոյության համար։ Բերվում են բարձր կարգի կետային ածանցյալների մատրիցային և ինտեգրալ ներկայացումներ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Т. Гамелин*, Равномерные алгебры, «Мир», М., 1973. [2] *Е. А. Горин*, Мат. заметки, 6, № 3 (1969). [3] *Б. Т. Батикян*, «Известия АН Арм. ССР», 12, № 5 (1977). [4] *J. Chaumat*, C. R. Acad. Sci., 269, № 9 (1969). [5] *S. Sidney*, Trans. Am. Math. Soc., 131 (1968). [6] *Б. Т. Батикян, Е. А. Горин*, Иссл. по линейным операторам и теории функций, VII (1976).