ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVI 1978 5

УДК 519

МАТЕМАТИКА

С. С. Агаян, А. Г. Саруханян

О гипотезе Плоткина

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. Р. Варшамовым 24.II 1978)

Пусть A—квадратная матрица порядка n

$$A=A(x_1, x_2, \ldots, x_m)=x_1K_1+x_2K_2+\ldots+x_mK_m, \tag{1}$$

в которой каждый элемент принимает одно из $2m$ значений $\pm x_1$, $\pm x_2$, $\pm x_3$, ..., $\pm x_m$ и выполняется следующее равенство

$$AA^T=\frac{n}{m}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_m^2)I_n, \tag{2}$$

где $A^T(x_1, x_2, \ldots, x_m)$—транспонированная матрица $A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, I_n—единичная матрица порядка n.

Матрица A, для которой справедливы соотношения (1) и (2) называется разбиением $D(n, m)$ [1].

Теорема 1. *Для данной матрицы Адамара порядка n, $n>1$, можно строить разбиения $D(n, 2)$, $D(2n, 4)$, $D(4n, 8)$. (М. Плоткин [1]).*

М. Плоткиным [1] построены разбиения $D(4k, 4)$ для $k=2, 4, \ldots, 92$.

Приведенный Бомер-Холлом в работе [2] массив порядка 12 является разбиением $D(12, 4)$ для $k=3$.

В работе [1] высказаны предположения:

1) Для каждой матрицы Адамара порядка $4k$ существует разбиение $D(4k, 4)$.

2) Для любого натурального k существует разбиение $D(4k, 4)$.

Отметим, что при положительном решении предположения (2) получили бы положительное решение проблемы Адамара [3], а именно: доказательство существования матриц Адамара всех порядков m, $m\equiv 0 \pmod 4$.

В настоящей заметке приводится матрица Адамара порядка 12, для которой не существует разбиения $D(12, 4)$, тем самым опровергнута гипотеза М. Плоткина о возможности разбиения $D(4k, 4)$ для любой матрицы Адамара. Приводится также пример матриц Адамара для которых разбиение не является единственным. И, наконец, доказывается, что предположение М. Плоткина остается верным, если в определении разбиения заменить условие о том, что каждый элемент матрицы A принимает одно из $2m$ значений $\pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_m$ условием, что $\sum_{i=1}^{m} K_i = H$ — есть $(-1, +1)$ матрица, где $K_i * K_j = 0$.

Переформулируем теорему 1 работы [4] следующим образом.

Теорема 2. *Для того, чтобы матрица $A(x_1, x_2, \ldots x_m)$ имела бы $D(n, m)$ разбиением, необходимо и достаточно существование матриц $K_1, K_2, \ldots, K_m$, удовлетворяющих условиям:*

1. $K_i * K_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$ *где* $*$ *адамарово произведение* [2] $\quad$ (3)

2. $K_i K_i^T = \frac{n}{m} I_n$, $i = 1, 2, \ldots, m$ $\quad$ (4)

3. $K_i K_j^T + K_j K_i^T = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$ $\quad$ (5)

Определение 1. Назовем множество $(0, -1, +1)$ — матриц порядка n, удовлетворяющих условиям (3), (4) и (5), каркасом порядка n, а матрицы K_i—элементами каркаса.

Определение 2. Назовем полукаркасом совокупность $(0, -1, +1)$ матриц порядка n, удовлетворяющих условиям:

1. $K_i * K_j = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$, где $*$—адамарово произведение.
2. $K_1 + K_2 + \ldots + K_m$ $(+1, -1)$ матрица
3. $K_i K_i^T = \frac{n}{m} I_n$, $i = 1, 2, \ldots, m$
4. $K_i K_j^T + K_j K_i^T = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$

Определение 3. Назовем полуразбиением матрицы $A(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ разложение вида $\sum_{i=1}^{m} x_i K_i = A$, когда множество $\{K_i\}_{i=1}^{m}$ является полукаркасом.

Замечание 1. Если для матрицы $A(x_1, x_2, \ldots x_m)$ можно построить полуразбиение, то

а) справедливо равенство

$$AA^T = \frac{n}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) I_n$$

б) $A(1, 1, 1, \ldots, 1) = H$ —является матрицей Адамара.

Отметим некоторые свойства каркасов:

1) Если $\{K_i\}_{i=1}^{m}$—каркас порядка n, то $\{e_i K_i\}_{i=1}^{m}$, $|e_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$ является каркасом порядка n, следовательно, $H = \sum_{i=1}^{m} e_i K_i$ — матрица Адамара порядка n.

2) Для каждой из матриц Адамара Q_i, $i = 0, 1, \ldots, 15$ полученных из массива Вильямсона

$$
Q(a, b, c, d)=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}
$$

можно построить два каркаса, следовательно и два разбиения $D(4,4)$ и $D_1(4, 4)$.

Из свойства 2, как следствие, получаем, что для любого $Q\in\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_{15}\}$ существуют две параметрические матрицы порядка 4, $H_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $i=1, 2$, такие, что

$$
H_iH_i^T=\left(\sum_{j=1}^{4} x_j^2\right)I_4, \quad H_1(1, 1, 1, 1)=H_2(1, 1, 1, 1)=Q
$$

В частности, если матрица Q имеет вид

$$
Q=\begin{bmatrix} + & + & + & + \\ - & + & - & + \\ - & + & + & - \\ - & - & + & + \end{bmatrix}
$$

то H_1 и H_2 — соответственно равны

$$
H_1=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & -x_2 \\ -x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}, \qquad H_2=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_4 & x_3 & -x_2 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & x_4 & -x_3 \\ -x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \end{bmatrix}
$$

Опираясь на эти свойства, доказывается что нижеприведенная матрица Адамара порядка 12.

$$
\Pi_{12}=\left|\begin{array}{cccccccccccc}
+ & + & + & + & + & - & - & - & + & - & - & - \\
- & + & - & + & + & + & + & - & + & + & + & - \\
- & + & + & - & + & - & + & + & + & - & + & + \\
- & - & + & + & + & + & - & + & + & + & - & + \\
+ & - & - & - & + & + & + & + & + & - & - & - \\
+ & + & + & - & - & + & - & + & + & + & + & - \\
+ & - & + & + & - & + & + & - & + & - & + & + \\
+ & + & - & + & - & - & + & + & + & + & - & + \\
+ & - & - & - & + & - & - & - & + & + & + & + \\
+ & + & + & - & + & + & + & - & - & + & - & + \\
+ & - & + & + & + & - & + & + & - & + & + & - \\
+ & + & - & + & + & + & - & + & - & - & + & +
\end{array}\right|
$$

не имеет $D(12, 4)$ разбиения. Этим опровергается гипотеза М. Плоткина о возможности разбиения $D(4k, 4)$ для любой матрицы Адамара.

Гипотеза М. Плоткина остается справедливой, если вместо разбиения матрицы A рассмотреть полуразбиение матриц.

Пусть H — матрица Адамара порядка $4n$, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Совокупность матриц* $\{K_i\}_{i=1}^{4}$, $K_i = P_i H$ — *является полукаркасом если* P_i *равно соответственно матрицам.*

$$P_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} I & R & R & R \\ -R & I & -R & R \\ -R & R & I & -R \\ -R & -R & R & I \end{bmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} I & -R & R & -R \\ R & I & R & R \\ -R & -R & I & R \\ R & -R & -R & I \end{vmatrix}, \tag{7}$$

$$P_3 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} I & R & -R & -R \\ -R & I & R & -R \\ R & -R & I & -R \\ R & R & R & I \end{vmatrix}, \quad P_4 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} I & -R & -R & R \\ R & I & -R & -R \\ R & R & I & R \\ -R & R & -R & I \end{vmatrix},$$

где

$$R = \{r_{i,j}\}_{i,j=1}^{n}, \qquad r_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{если } i + j = n + 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Следствие. Для каждой матрицы Адамара H порядка $4k$ существует полуразбиение $D_n(4k, 4)$.

Теорема 4. *Для существования полуразбиения* $D_n(n, m)$ *необходимо и достаточно существования полукаркаса порядка* n. *Другими словами, для существование матрицы Адамара порядка* n *необходимо и достаточно существование полукаркаса порядка* n.

Замечание. Задачи существования или построения матриц Адамара порядка $4n$, привело к существованию или построению для любого натурального n полуразбиения $D_n(4n, 4)$ или же, что то же самое, существованию полукаркаса порядка $4n$.

Теорема 5. *Для данной матрицы Адамара порядка* n, $n > 2$ *можно построить полуразбиение* $D_n(2^k n, 4)$, $D_n(2^{k+1} n, 8)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Вычислительный центр
Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ս. Ս. ԱՂԱՅԱՆ, Հ. Գ. ՍԱՐՈՒԽԱՆՅԱՆ

Պլոտկինի հիպոթեզի մասին

Դիցուք A-ն $n \times n$ չափանի մատրից է, որի էլեմենտները են $\pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_m$ *և տեղի ունեն հետևյալ պայմանները.*

$$A = A(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x_1 K_1 + x_2 K_2 + \ldots + x_m K_m$$

$$AA^T = \frac{n}{m}(x_1^2+x_2^2+\ .\ .\ .\ +x_m^2)\, I_n.$$

A մատրիցան, որի համար տեղի ունեն վերոգրյալ պայմանները, կոչվում է $D(n, m)$ տրոհում [1]։

Մորիս Պլոտկինը առաջարկել է հետևյալ հիպոթեզները [1]։

1. $4k$ չափանի Ադամարի ցանկացած մատրիցայի համար գոյություն ունի $D(4k, 4)$ տրոհում։

2. Ցանկացած k բնական թվի համար գոյություն ունի $D(4k, 4)$ տրոհում։

Ներկա աշխատանքում բերված է 12 չափանի Ադամարի մատրիցա, որի համար գոյություն չունի $D(12, 4)$ տրոհում, դրանով իսկ հերքված է Պլոտկինի առաջին հիպոթեզը։

Ապացուցված է, որ Պլոտկինի առաջին հիպոթեզը ճիշտ է կիսատրոհման համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. Plotkin.* Decomposition of Hadamard Matrices, Journal of Combinatorial Theory (A) 12, 127—130 (1972). [2] *Marshall Hall, Jr.*, Combinatorial Theory (Blaisdell, Ginn and Co. I.) Waltham, Massachusetts, 1967. [3] *W. D. Wallis*, Anne Penfold Street, Jennifer Seberry Wallis, Combinatorics: Room Squares, Sum-free Sets, Hadamard Matrices, (Lecture Notes in Mathematics, Vol 292, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972). [4] *A. V. Geramita and J. H. Verner.* Can. J. Math., vol. XXVIII, № 1, pp. 215—224, 1976.