ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVI 1978 5

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

М. М. Мирзоян

Характеристика граничных особенностей мероморфных функций и функций, порождаемых предельными множествами вдоль касательных направлений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракеляном 17/I 1978)

В настоящей работе продолжается изучение граничных свойств мероморфных функций вдоль касательных путей, начатом в ([1]) и используются все содержащиеся там обозначения и определения.

1. Пусть $D:|z|<1$ — единичный круг, $\Gamma:|z|=1$ — единичная окружность и Ω — сфера Римана. Пусть $f(z)$ — произвольная мероморфная функция определенная в круге D. Следуя ([2]), последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n\in D$, $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=1$, называют P — последовательностью для $f(z)$, если для любого $\varepsilon>0$ и любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_\nu}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении неэвклидовых кругов $\bigcup\{z\in D;\ \sigma(z, z_{n_\nu})<\varepsilon\}$ бесконечно часто каждое значение $w\in\Omega$, кроме, быть может, двух значений. Пусть A — произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Точку $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ отнесем к множеству $P_A(f)$ (соотв. $P(f)$ или $OP(f)$), если каждый q — путь $L_q(\zeta, \alpha)$, $0<\alpha<\infty$, $q\in A$ (соотв. каждая хорда $h(\zeta, \varphi)$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, или каждый орицикл $\Lambda(\zeta)$) содержит P-последовательность функции $f(z)$. Точку $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ отнесем к множеству $I_A^*(f)$ (соотв. $I^*(f)$ или $OI^*(f)$), если для любого q-пути $L_q(\zeta, \alpha, \delta)$, $0<\alpha<\infty$, $q\in A$ (соотв. для любой хорды $h(\zeta, \varphi)$, $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ или для любого орицикла $\Lambda(\zeta)$) в точке $\zeta\in\Gamma$ имеем: $C(f, \zeta, L_q(\zeta, \alpha))=\Omega$ (соотв. $C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi))=\Omega$ или $C(f, \zeta, \Lambda(\zeta))=\Omega$) и ни один q — путь $L_q(\zeta, \alpha)$, (соотв. ни одна хорда $h(\zeta, \varphi)$) или ни один орицикл $\Lambda(\zeta)$ не содержит P-последовательность для функции $f(z)$. Множества $P_A(f)$ и $I_A^*(f)$ являются непересекающимися подмножествами множества $I_A(f)$ (определение см. в ([1])).

Для произвольной мероморфной функции $f(z)$ имеют место следующие равенства:

$$P_{\{0\}}(f) = P(f), \qquad P_{\{1\}}(f) = OP(f),$$
$$I^{*}_{\{0\}}(f) = I^{*}(f) \quad \text{и} \quad I^{*}_{\{1\}}(f) = OI^{*}(f)$$

2. Уточнением теоремы 3 работы ([1]) является следующая теорема.

Теорема 1. *Для произвольной мероморфной в круге D функции $f(z)$ и для произвольного конечного множества A неотрицательных чисел, справедливо разложение:*

$$\Gamma = M_A(f) \cup I^{*}_A(f) \cup P_A(f) \cup E,$$

где E — множество первой категории и типа F_σ на Γ.

Замечание 1. В случае $A = \{0\}$ и $A\{0,1\}$ эта теорема была доказана в работах ([3]) и ([4]), соответственно.

В процессе доказательства теоремы 1 устанавливается также следующий результат.

Теорема 2. *Для произвольной мероморфной в круге D функции $f(z)$ и для произвольного конечного множества A неотрицательных чисел, справедливо разложение:*

$$I_A(f) = I^{*}_A(f) \cup P_A(f) \cup E,$$

где E — множество первой категории и типа F_σ на Γ.

3. Пусть ζ произвольная точка на Γ, $\zeta \in \Gamma$. Точку ζ отнесем к множеству $F_A(f)$ ($F(f)$) и назовем обобщенной A — точкой Фату (точкой Фату), если множество $\bigcup C(f, \zeta, \Delta_q(\zeta, \alpha, \beta, \delta))$ ($\bigcup C(f, \zeta, \Delta^{*}(\zeta))$) вырождено, где объединение берется по всем q — углам $\Delta_q(\zeta, \alpha, \beta, \delta)$, $0<\alpha<\beta<\infty$, $0<\delta<1$, $q \in A$ (по всем углам Штольца $\Delta^{*}(\zeta)$). Ясно что, для произвольной мероморфной функции $f(z)$, справедливо равенство $F_{\{0\}}(f) = F(f)$. Точку $\zeta \in \Gamma$ отнесем к множеству $J_A(f)$ ($J(f)$), если в каждом q — угле $\Delta_q(\zeta, \alpha, \beta, \delta)$, $0<\alpha<\beta<\infty$, $0<\delta<1$, $q \in A$ (в каждом угле Штольца $\Delta^{*}(\zeta)$) с вершиной в точке ζ функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение $w \in \Omega$, кроме, быть может, двух значений из Ω. Ясно, что множество $J_A(f)$ является подмножеством множества $I_A(f)$, а также нетрудно проверить справедливость равенства $J_{\{0\}}(f) = J(f)$, для произвольной мероморфной в круге D функции $f(z)$. Из леммы 1 и 2 работы ([1]) следует справедливость вложения $P_A(f) \subset J_A(f)$ для произвольной мероморфной в D функции $f(z)$ и произвольного конечного множества A неотрицательных чисел. Обратное вложение, вообще говоря, не имеет места, это доказывается аналогично, как и в случае углов Штольца в работах ([3]) (см. теорема 3, стр. 23) и ([5]). В работах ([6]), ([7]) и ([8]) получены полные характеристики множеств $I_{\{0\}}(f)$, $J_{\{0\}}(f)$ и $P_{\{0\}}(f)$. Следующие две теоремы обобщают эти результаты на общий случай.

Теорема 3. *Пусть A конечное множество неотрицательных чисел. Тогда для произвольной мероморфной в D функции $f(z)$ множества: $I_A(f)$, $J_A(f)$ и $P_A(f)$ являются множествами типа G_δ на Γ.*

Теорема 4. *Пусть A — произвольное конечное множество неотрицательных чисел и E множество типа G_δ на Γ. Тогда существует такая мероморфная функция $f(z)$ в круге D, для которой*

$$I_A(f) = P_A(f) = J_A(f) = E = \Gamma \setminus F_A(f).$$

4. Укажем теперь полную характеристику множества $M_A(f)$.

Теорема 5. *Для произвольной мероморфной в D функции $f(z)$ и произвольного конечного множества A неотрицательных чисел, множество $M_A(f)$ имеет структуру $M_A(f) = G \setminus F$, где G — открытое множество, а F — множество первой категории и типа F_σ на Γ.*

Теорема 6. *Для произвольного конечного множества A неотрицательных чисел и для произвольного множества $E \subset \Gamma$ вида $E = G \setminus F$, где G — открытое множество, а F — множество первой категории и типа F_σ на Γ, существует такая мероморфная в D функция $f(z)$, для которой $E = M_A(f)$.*

В случае $A = \{0\}$ теоремы 5 и 6 установлены в работе ([9]).

5. Следующая теорема является обращением теоремы 3 работы ([1]).

Теорема 7. *Пусть A — конечное множество неотрицательных чисел и пусть $\Gamma = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, в котором множества E_1, E_2, E_3 попарно не пересекаются и выполняются условия: 1) E_2 — множество типа G_δ, 2) E_3 — множество типа F_σ и первой категории на Γ, 3) $E_1 \cap \overline{E_2} = \varnothing$. Тогда существует мероморфная в D функция $f(z)$, для которой $M_A(f) = E_1$, $I_A(f) = E_2$.*

6. Пусть $\Gamma_1 \Delta \Gamma_2$ обозначает симметричную разность произвольных множеств Γ_1 и Γ_2 на Γ. В работе ([10]) показано, что для произвольной мероморфной в круге D функции $f(z)$ множества $M_{\{0\}}(f) \Delta M_{\{1\}}(f)$, $I_{\{0\}}(f) \Delta I_{\{1\}}(f)$ являются множествами первой категории относительно Γ. Следующая теорема уточняет этот результат и переносит их на случай произвольных множеств.

Теорема 8. *Пусть A — произвольное конечное множество неотрицательных чисел и $q \notin A$. Тогда, для произвольной мероморфной в круге D функции $f(z)$ имеем:*

(i) Множество q — точек Плеснера не являющимися обобщенными A — точками Плеснера является множеством первой категории и типа F_σ на Γ.

(ii) Множество q — точек Мейера не являющимися обобщенными A — точками Мейера является множеством первой категории и типа F_σ на Γ.

Следствие 1. Пусть p и q произвольные не отрицательные числа, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p \neq q$. Тогда, для произвольной мероморфной в круге D функции $f(z)$, множества $(M_{(p)}(f) \Delta M_{(q)}(f))$ и $(I_{(p)}(f) \Delta I_{(q)}(f))$ являются множествами первой категории и типа F_σ на Γ.

Автор выражает искреннюю благодарность В. И. Гаврилову за постоянное внимание к работе и за ценные указания.

Ереванский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Մ. Մ. ՄԻՐԶՈՅԱՆ

Մերոմորֆ ֆունկցիաների եզրային եզակիությունների բնութագրումը, որոնք ծնվում են շոշափող ուղղությունների սահմանային բազմություններով

Հոդվածում դիտարկվում են միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների եզրային վարքը շրջանագծի հետ կամայական շոշափման կարգ ունեցող ուղիների երկայնքով: Այդպիսի շոշափող ուղիների համար տրվում է $M_\Delta(f)$, $I_\Delta(f)$, $J_\Delta(f)$, $P_\Delta(f)$ բազմությունների լրիվ բնութագիրը, ինչպես նաև Մայերի թեորեմի շրջելիությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *М. М. Мирзоян*, ДАН Арм. ССР, т. LXVI, № 2 (1978). [2] *В. И. Гаврилов*, Вестн. Москов. ун-та, сер. матем., мех., № 5, 3 (1965). [3] *В. И. Гаврилов*, ДАН СССР, т. 216, № 1 (1974). [4] *А. И. Айрапетян, В. И. Гаврилов*, «Известия АН Арм. ССР», сер. математика, № 5, 1976. [5] *В. И. Гаврилов*, Вестн. Московск. ун-та, сер. матем., мех., № 4, 35 (1976). [6] *P. Lappan*, Bull London Math. Soc, v—2, № 1, 60 (1970). [7] *P. Colwell*, Bull London Math. Soc, v—4, № 3, 327 (1972). [8] *В. И. Гаврилов, А. Н. Канатников*, ДАН СССР, т. 232, № 6 (1977). [9] *В. И. Гаврилов, А. Н. Канатников*, ДАН СССР, т. 233, № 1 (1977). [10] *F. Bagemihl*. Ann Acad. Scient. Fenn. Ser A, N 385, P. 1—18. 1966