ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVI 1978 5

УДК 519.95

МАТЕМАТИКА

Г. З. Саркисян

О классе арифметических функций, вычислимых при помощи схем из функциональных элементов

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 22/XII 1977)

Арифметическими функциями будем называть функции, определенные на натуральных числах и принимающие натуральные значения 0, 1, 2, . . . Каждое натуральное число n будем отождествлять со словом, имеющим номер n в алфавитной взаимно-однозначной нумерации всех слов в алфавите $\{0, 1\}$ ([1]), через $l(x)$ будем обозначать длину слова x. Схемы из функциональных элементов (сокращенно, ф-схемы) определяются так же, как в ([2]); под сложностью $\|s\|$ -ф-схемы s будем понимать сумму числа ее входов и числа ее функциональных элементов (сокращенно, ф-элементов). Основным предметом нашего рассмотрения является класс F всюду определенных арифметических функций, вычислимых на схемах полиномиальной сложности из функциональных элементов. Напомним определение класса F ([3,4]).

$f\in F$ в том и только в том случае, когда существует полином T от одной переменной, такой, что для всяких натуральных $m_1, m_2, \ldots$ $\ldots, m_n$ существует ф-схема s с $m_1+m_2+\ldots+m_n$ входами и $2t$ выходами, где $t=\max\limits_{\substack{l(x_1)=m_1\\ \cdots\\ l(x_n)=m_n}} l(f(x_1, x_2, \ldots, x_n))$, удовлетворяющая следующим условиям:

$$\|s\|\leqslant T(m_1+\cdots+m_n)$$

и для всяких $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих условиям $l(x_1)=m_1$; $l(x_2)=m_2$; $\ldots$, $l(x_n)=m_n$, имеет место равенство

$$S(x_1, \ldots, x_n)=D(f(x_1, \ldots, x_n), 2t),$$

где через $D(x, t)$ обозначена следующая функция

$$D(x, t)=\begin{cases}\underbrace{000\cdots\cdots 0}_{2t\ \text{раз}} & \text{если}\quad l(x)>t\\ x\underbrace{0\cdots 0}_{t-l(x)\,\text{раз}}\underbrace{1\cdots 1}_{l(x)\,\text{раз}}\underbrace{0\cdots 0}_{t-l(x)\,\text{раз}} & \text{если}\quad l(x)\leqslant t\end{cases}$$

Через П будем обозначать класс функций, вычислимых на машинах Тьюринга за полиномиальное время ([5]; ([6], стр. 133—137); ([7]; ([8], стр. 182)). В ([4]) доказано, что $\Pi \subseteq F$.

Посредством R будем обозначать класс функций f, переводящих слова в двоичном алфавите в слова того же алфавита и такие, что значение $f(x)$ зависит только от длины слова x, длина слова $f(x)$ совпадает с длиной x, и если слово x есть начало слова y, то слово $f(x)$ есть начало слова $f(y)$. Поскольку мы отождествляем натуральные числа со словами в двоичном алфавите, мы можем рассматривать R как класс арифметических функций. Нетрудно показать, что $R \subseteq F$ (а именно, при всякой $f \in R$ в качестве полинома $T(x)$ можно взять некоторую линейную функцию $Ax+B$).

Напомним, что в соответствии с теоремой А. А. Мучника ([6]), класс П имеет конечный базис относительно суперпозиции. Дальнейшие рассмотрения связаны с установлением следующей теоремы.

Основная теорема. *Если* Б—*произвольный базис класса* П *относительно суперпозиции, то класс F совпадает с множеством функций, получаемых при помощи операции суперпозиции из функций класса* $Б \cup R$.

Доказательство этой теоремы основано на двух утверждениях, представляющих и некоторый самостоятельный интерес.

Будем пользоваться понятием машины Тьюринга с „оракулом", которое понимается так же как в определении М. Девиса и Х. Роджерса ([9]), со следующими изменениями: (1) в роли „оракулов" рассматриваются не множества натуральных чисел как у М. Девиса и Х. Роджерса, ([9]) а арифметические функции, из свойств которых, однако, в нашем случае, машина Тьюринга использует лишь информацию о том, равны ли 0 те или иные их значения или нет (это изменение несущественно, оно введено лишь из технических соображений); (2) в алфавите машины вместо одной буквы, служащей для обращения к „оракулу" выделяются какие-либо две буквы α и β, используемые для обращений к „оракулу", следующим образом. Команда МТ, требующая обращения к „оракулу", имеет такой же вид, как в ([8] стр. 169), а именно, $q_i a_j \to q_k q_l$, где q_i, q_k, q_l —внутренние состояния машины, a_l—состояние воспринимаемой ячейки; если в некоторой конфигурации машина находится в состоянии q_i и обозревает символ a_j, то выполнение команды $q_i a_j \to q_k q_l$ заключается в переходе внутреннего состояния машины в состояние q_k или в состояние q_l (без изменения слова, написанного на ленте, и без сдвига наблюдаемой клетки), в зависимости от результатов нижеследующих построений (где через w обозначена функция, используемая в качестве „оракула"): из слова p, записанного на ленте, рассматриваемой в данной конфигурации, выделяются все буквы α и β; слово, составленное из этих букв (взятых в том порядке в котором они написаны в слове p), обозначается через r; слово, полученное из слова r заменой буквы α буквой 0, буквы β—буквой 1, обозначается через t

(тогда слово t может рассматриваться в соответствии с введенным выше соглашением как натуральное число); МТ переходит в состояние q_k, если $w(t)=0$ и в состояние q_l если $w(t)\neq 0$.

Через A_w обозначим множество тех функций, которые вычисляются на машине Тьюринга с фиксированным „оракулом" w за количество шагов, полиномиально оценивающееся в зависимости от длины исходных слов.

Через R^* обозначим класс арифметических функций f, удовлетворяющих следующему условию:

$$\forall x(f(x)=0 \vee f(x)=1)\ \&\ \forall x(\neg\exists i(x=2^i-1)\supset f(x)=0));$$

(напомним, что в соответствии с определениями из ([1], стр. 222—226), числа вида 2^i-1 отождествляются со словами в $\{0, 1\}$ не содержащими буквы 1).

Теорема 1.

$$F=\bigcup_{w\in R^*} A_w.$$

Доказательство включения $F\subset\bigcup\limits_{w\in R^*} A_w$ проводится следующим образом. Если $f\in F$, то это означает, что существует последовательность ф-схем $s_0^f, s_1^f, \ldots, s_n^f, \ldots$, которые вычисляют функцию f (в том смысле, как это указано в определении класса F) соответственно на словах длины 0, 1, . . . n, . . . и таковы, что сложность полиномиально оценивается в зависимости от n. Далее, исходя из последовательности $s_0^f, s_1^f, \ldots, s_n^f, \ldots$ можно построить „оракул" $w\in R^*$, содержащий всю информацию о последовательности $\{s_i^f\}$ (для этого заранее фиксируется некоторый „естественный" способ кодирования ф-схем в виде слов в $\{0, 1\}$; исходя из указанного „оракула" информация о значении функции f в каждой заданной точке может быть извлечена с помощью машины Тьюринга M (одной и той же для всех $w\in R^*$). Метод кодирования последовательностей ф-схем с помощью функций из R^* и схему машины M можно выбрать таким образом, что машина M будет заканчивать свою работу за количество шагов, оцениваемое некоторым полиномом в зависимости от длины исходных слов (этот полином строится исходя из полинома T, обладающего по отношению к функции f свойствами, указанными в определении класса F).

Доказательство обратного включения $\bigcup\limits_{w\in R^*} A_w\subset F$ проводится посредством моделирования работы машин Тьюринга с „оракулом" при помощи последовательностей ф-схем. Наличие „оракула" требует привлечения информации о всех используемых в данном вычислительном процессе значениях „оракула" и включения этой информации в рассматриваемые ф-схемы. Оказывается, однако, что метод моделирования может быть выбран таким образом, что сложность этой информации остается в пределах, требуемых определением класса F.

Введем теперь некоторые дополнительные понятия и обозначения. Если w-произвольная функция из R^*, то через Γ_w будем обозначать следующую функцию:

$$\Gamma_w(x) = \sum_{i=1}^{l(x)} 2^{l(x)-i}(1 + w(2^i - 1)).$$

Иначе говоря, если слово в $\{0, 1\}$, отождествленное с числом x, имеет длину n, то слово, в $\{0, 1\}$ отождествленное с $\Gamma_w(x)$ имеет вид $y_1 y_2 \ldots y_n$, где y_i при каждом i от 1 до n есть буква 0 или буква 1 в случаях, когда значение $w(\underbrace{00 \ldots 0}_{i \text{ раз}})$ есть соответственно число 0 или число 1. Легко видеть, что $\Gamma_w \in R$, при $w \in R^*$ и всякая функция из R представима в виде Γ_w при некоторой $w \in R^*$.

Следующие понятия вводятся по аналогии с ([6], стр. 124).

Пусть G—некоторый класс арифметических функций, ω-операция суперпозиции арифметических функций (понимается в наиболее общем смысле, так же как в ([10])) и пусть класс G замкнут относительно операции суперпозиции.

Через $E_\omega(H)$, где H—некоторый класс функций, будем обозначать множество всевозможных функций, полученных из функций принадлежащих H, посредством операции суперпозиции.

Пусть, наконец, w—некоторая функция, принадлежащая R^*. Функцию $v(n, x_1, \ldots, x_n, y, z)$ назовем w—квазиуниверсальной для n—местных функций класса G относительно класса функций H, если для всякой n—местной функции $f \in G$ существует натуральное число n_0 и n—местные функции $g \in E_\omega(H)$, $h \in E(H)$, такие, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) \equiv v(n_0, x_1, \ldots, x_n g(x_1, \ldots, x_n), \Gamma_w(h(x_1, \ldots, x_n))).:$$

Класс вычислимых функций Φ назовем w—полным, где $w \in R^*$, если (1) он содержит w—квазиуниверсальную функцию $v(n, x, y, z)$ для одноместных функций класса Φ относительно некоторого конечного множества $H \subset \Phi$, (2) класс Φ замкнут относительно операции суперпозиции, (3) класс Φ содержит константу 0, $x+1$ и какую-либо тройку функций $I(x, y)$, $K(z)$, $L(z)$, нумерующих пары. По аналогии с доказательством соответствующей теоремы из ([6]) нетрудно показать, что всякий w—полный класс содержит конечный базис $H \cup \{v, \Gamma_w, 0, x+1, I\}$ относительно суперпозиции.

Теорема 2. *Каждый из классов A_w, где $w \in R^*$ является w—полным.*

Доказательство проводится методами, аналогичными методам из ([6]), с изменениями, соответствующими наличию „оракула" w. Как и в ([6]), существенную роль играют свойства функции $d(x) = (x+1)^{[\log_2(x+1)]}$. Оказывается возможным построить полиномиально вычислимую функцию $v(n, x, y, z)$, которая при всяком $w \in R^*$ является w—квазиуниверсальной для одноместных функций из A_w относительно одноэлементного множества, состоящего из функции d.

Теперь на основе теорем 1 и 2 основная теорема может быть установлена следующим образом. Обозначим через $Б_0$ множество, состоящее из функций 0, $x+1$, v, d, I. Через F' обозначим множество функций, получаемых из функций класса $Б_0 \cup R$ посредством операции суперпозиции. Требуется доказать, что $F'=F$. Поскольку $Б_0 \subseteq П \subseteq F$, $R \subseteq F$ и класс F замкнут относительно суперпозиции, имеем: $F' \subseteq F$. Если теперь $f \in F$, то в силу теоремы 1 будем иметь $f \in A_w$ при некотором $w \in R^*$, но тогда по аналогии с доказательством теоремы 2 можем получить представление:

$$f(x) = v(n_0, x, d(\underbrace{d \ . \ . \ . \ d}_{m_1 \text{ раз}}(x) \ . \ . \ . \ )), \Gamma_w(d(\underbrace{d \ . \ . \ . \ d}_{m_2 \text{ раз}}(x) \ . \ . \ . \ ))$$

при некоторых натуральных n_0, m_1, m_2. Поскольку $\Gamma_w \in R$, отсюда очевидным образом получаем $f \in F'$. Таким образом, $F'=F$ и требуемое утверждение тем самым устанавливается для случая, когда в роли базиса взят $Б_0$ (то, что $Б_0$ является базисом для класса П относительно суперпозиции, следует из представления $f(x) = v(n_0, x, \underbrace{d(d \ . \ . \ . \ d}_{m_1 \text{ раз}}(x) \ . \ . \ . \ ), x)$, которое, как можно показать, имеет место для любой функции $f \in П$ при некоторых n_0 и m_1). Отсюда утверждение теоремы получается и для случая произвольного базиса Б класса П, поскольку любые такие базисы выразимы друг через друга при помощи суперпозиции, и класс F замкнут относительно суперпозиции.

Ереванский государственный университет

Գ. Ջ. ՍԱՐԽՈՅԱՆ

Ֆունկցիոնալ էլեմենտներից կազմված սխեմաներով հաշվարկվող ֆունկցիաների դասի մասին

Ֆունկցիոնալ էլեմենտներից կազմված, մուտքերի թվի նկատմամբ բազմանդամային բարդություն ունեցող սխեմաներով հաշվարկվող թվաբանական ֆունկցիաների F դասի համար ([3]). ([1]) *տրվում է անալիտիկ ներկայացում: Ապացուցվում է, որ* $F \bigcup_{w \in R^*} A_w$, *որտեղ՝* $R^* = \{ w / \forall x (w(x) = 0 \vee w(x) = 1) \& (\forall x (\neg \exists i (x = 2^i - 1) \supset w(x) = 0))\}$, *իսկ* A_w*-ն այն ֆունկցիաների դասն է, որոնք հաշվարկվում են ֆիքսված* w *ֆունկցիայի նկատմամբ հարաբերական Տյուրինգի մեքենայի միջոցով* ([6]) *մուտքային բառի երկարության նկատմամբ բազմանդամով գնահատվող ժամանակում: Սրանից ելնելով ցույց է տրվում, որ F դասը համընկնում է այնպիսի ֆունկցիաների դասի հետ, որոնք ստացվում են* $Б \cup R$ *դասից սուպերպոզիցիայի միջոցով, որտեղ* Б*-ն կամայական բազիս է այն ֆունկցիաների դասի համար, որոնք*

Теперь на основе теорем 1 и 2 основная теорема может быт установлена следующим образом. Обозначим через $Б_0$ множеств состоящее из функций 0, $x+1$, v, d, l. Через F' обозначим множест во функций, получаемых из функций класса $Б_0 \cup R$ посредством опе рации суперпозиции. Требуется доказать, что $F'=F$. Посколь $Б_0 \subseteq П \subseteq F$, $R \subseteq F$ и класс F замкнут относительно суперпозиции, име ем: $F' \subseteq F$. Если теперь $f \in F$, то в силу теоремы 1 будем иметь $f \in A$ при некотором $\varpi \in R^*$, но тогда по аналогии с доказательством теоре мы 2 можем получить представление:

$$f(x) = v(n_0,\ x,\ d(\underbrace{d\ .\ .\ .\ d}_{m_1\ \text{раз}}(x)\ .\ .\ .\ )),\ \Gamma_{\varpi}(d(\underbrace{d\ .\ .\ .\ d}_{m_2\ \text{раз}}(x)\ .\ .\ .\ ))$$

при некоторых натуральных n_0, m_1, m_2. Поскольку $\Gamma_{\varpi} \in R$, отсюд очевидным образом получаем $f \in F'$. Таким образом, $F'=F$ и тре буемое утверждение тем самым устанавливается для случая, когда роли базиса взят $Б_0$ (то, что $Б_0$ является базисом для класса П отно сительно суперпозиции, следует из представления $f(x)=v(n_0,$ $\underbrace{d(d\ .\ .\ .\ d}_{m_1\ \text{раз}}(x)\ .\ .\ .\ ),\ x)$, которое, как можно показать, имеет мест для любой функции $f \in П$ при некоторых n_0 и m_1). Отсюда утверж дение теоремы получается и для случая произвольного базиса класса П, поскольку любые такие базисы выразимы друг через дру га при помощи суперпозиции, и класс F замкнут относительно су перпозиции.

Ереванский государственный университет

Գ. Զ. ՍԱՐԻՍՅԱՆ

Ֆունկցիոնալ էլեմենտներից կազմված սխեմաներով հաշվարկվող ֆունկցիաների դասի մասին

Ֆունկցիոնալ էլեմենտներից կազմված, մուտքերի թվի նկատմա բազմանդամային բարդություն ունեցող սխեմաներով հաշվարկվող թվաբ նական ֆունկցիաների F դասի համար (3). (4) *տրված է անալիտիկ ներկ յացում: Ապացուցված է, որ* $F \bigcup_{\varpi \in R^*} A_{\varpi}$, *որտեղ՝* $R^* = \{\varpi/\forall x(\varpi(x)$ $=0 \vee \varpi(x)=1)\ \&\ (\forall x(\neg\exists i(x=2^i-1) \supset \varpi(x)=0))\}$, *իսկ* A_{ϖ}*-ն այն ֆու ցիաների դասն է, որոնք հաշվարկվում են ֆիքսված* ϖ *ֆունկցիայի նկա մամբ հարաբերական Տյուրինգի մեքենայի միջոցով* (9) *մուտքային բ երկարության նկատմամբ բազմանդամով գնահատվող ժամանակում: Սրա ելնելով ցույց է տրվում, որ F դասը համընկնում է այնպիսի ֆունկցիան դասի հետ, որոնք ստացվում են* $Б \cup R$ *դասից սուպերպոզիցիայի միջոց որտեղ Б-ն կամայական բազիս է այն ֆունկցիաների դասի համար, որ*