УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

С. Л. Берберян

Об угловых граничных значениях функций классов T_H

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 21/11 1978)

1. Пусть D обозначает круг $|z| < 1$ и Γ — окружность $|z| = 1$ в комплексной плоскости. Для произвольной точки $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ обозначим через C_θ окружность $|z - \frac{1}{2}e^{i\theta}| = \frac{1}{2}$, через D_θ — ее внутренность, и для произвольного φ , $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, обозначим через $h(\theta, \varphi)$ прямолинейный отрезок, соединяющий точки $\xi = e^{i\theta}$ и $(1 - e^{-i\varphi} \cos \varphi)e^{i\theta}$. Другими словами, $h(\theta, \varphi)$ является хордой круга D_θ , оканчивающейся в точке $\xi = e^{i\theta}$ и образующей с радиусом в этой точке угол раствора φ , $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$: подобласть круга D_θ , заключенную между хордами $h(\theta, \varphi_1)$, $h(\theta, \varphi_2)$ и окружностью C_θ , обозначим через $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$.

По определению (1), непрерывная в интервале $(0, \infty)$ функция $H(t)$ принадлежит классу S_H , если $H(t)$ не возрастает на $(0, \infty)$, $\lim_{t \rightarrow +0} H(t) = +\infty$, $tH(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow 0$ и

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{tH(t)} < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{xH(x)} \int_0^x H(t)dt = c, \quad c \neq 0, \infty. \quad (1)$$

Непрерывную функцию $h(t) \geq 0$, определенную в интервале $[0, \infty)$, называют функцией меры, если она обладает следующими свойствами: $h(t)$ возрастает на $[0, \infty)$, $h(0) = 0$, $t^{-2}h(t)$ — неубывающая функция при $t \rightarrow 0$. Непосредственно видно, что каждая функция $H \in S_H$ порождает функцию меры $h_H(t) = tH(t)$. Пусть $E \subset \Gamma$ — произвольное борелевское множество. Обозначим через $\Lambda_h(E)$ его хаусдорфову h -меру, т. е., $\Lambda_h(E) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \Lambda^{(h)}(E)$, где $\Lambda^{(h)}(E) = \inf \sum h(r_i)$, и инфимум берется по всем покрытиям U_S множества E счетными наборами кругов S радиуса $r_i < \rho$. Для произвольной функции $H \in S_H$ положим

$$\lambda_n^{(H)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{kH(1/k)} \quad n = 1, 2, \dots$$

и обозначим через $\text{cap}_H E$ выпуклую емкость множества E относительно последовательности $\{\lambda_n^{(H)}\}$ (см. определение в (2), стр. 364). В случаях $H(t) = t^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$ и $H(t) = t^{-1}$ получаем обычные α -емкость $\text{cap}_\alpha E$ и логарифмическую емкость $\text{cap}_0 E$ множества E .

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $E \subset \Gamma$ — произвольное борелевское множество и $H \in C_H$. Если $\Lambda_{h_H}(E) = 0$, где $h_H(t) = tH(t)$, то $\text{cap}_H E = 0$.

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что функция $\bar{h}_H(t)$

$$\bar{h}_H(t) = \int_0^t H(t) dt$$

является функцией меры. В силу условия (1), $\Lambda_{h_H}(E)$ и $\Lambda_{\bar{h}_H}(E)$ равны нулю или положительные одновременно. С другой стороны, согласно одному результату из ((1), теорема 2), если $\Lambda_{\bar{h}_H}(E) = 0$, то $\text{cap}_H E = 0$, что доказывает утверждение леммы 1.

2. Рассмотрим мероморфную в D функцию $f(z)$, принимающую значения на сфере Римана Ω . Сферическую производную функции $f(z)$ обозначим через $\rho(f(z)) = |f'(z)| |1 + |f(z)|^2|^{-1}$. Если существует $\lim f(z)$, когда $z \rightarrow \xi = e^{i\theta}$, $z \in \Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$ и предел не зависит от выбора угла $\Delta(\theta, \varphi_1, \varphi_2)$, то обозначим его через $f(\theta)$.

Принято говорить (см. (1,2)), что функция $f(z)$ принадлежит классу T_H , если $H \in C_H$ и

$$T_H(f) = \int_0^1 A(t) H(1-t) dt < \infty \quad \text{при} \quad \int_0^1 H(1-t) dt < +\infty$$

$$T_1(f) = \lim_{t \rightarrow 1-0} A(t) < \infty \quad \text{при} \quad \int_0^1 H(1-t) dt = \infty$$

где

$$A(t) = \int_{|z| < t} \int |\rho(f(z))|^2 dx dy \quad z = x + iy.$$

Классы T_H являются подклассами функций ограниченного вида. Известно (2), что $f \in T_H$ в том и только в том случае, когда

$$\iint_{|z| < 1} (1-|z|) H(1-|z|) |\rho(f(z))|^2 dx dy < \infty. \quad (2)$$

Для функции $f(z) \in T_H$, $H \in C_H$ известно (см. (1)), что $\lim_{r \rightarrow 1-0} f(re^{i\theta})$ существует для каждой точки $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$, исключая самое большее множество точек $\xi = e^{i\theta} \in E \subset \Gamma$, для которого $\text{cap}_H E = 0$. Мы усиливаем этот результат в следующем виде.

Теорема 1. Пусть $H \in C_H$ и $f \in T_H$ — произвольны. Тогда на Γ можно указать такое множество E , $\text{cap}_H E = 0$, что в каждой точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ существует определенный предел $f(\theta)$.

Замечание. В случае $H(t) = t^{-1}$ эта теорема была доказана А. Бёрлингом (4), а в случае $H(t) = t^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ — Л. Карлесоном (5), гл. V, теорема 4. В ее доказательстве в общем случае мы придерживаемся схемы из (5).

3. Доказательство теоремы 1. Рассмотрим окружность $C_n: |z| = r_n$, где $r_n = 1 - 2^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$. Для произвольного натурального числа a рассмотрим на окружностях C_n , $n = 1, 2, \dots$ дуги $\omega_{\nu, n} = \{z = r_n e^{i\theta}; \nu \cdot 2\pi \cdot 2^{-n} < \theta < \nu \cdot 2\pi \cdot 2^{-n} + 2\pi a \cdot 2^{-n}\}$, $\nu = 1, \dots, 2^n$.

Рассмотрим области

$$A_{\nu, n} = \{z = re^{i\theta} \in D; \nu \cdot 2\pi \cdot 2^{-n} < \theta < \nu \cdot 2\pi \cdot 2^{-n} + 2\pi a \cdot 2^{-n}, r_{n-1} < r < r_{n+1}\}$$

и положим

$$a_n = \sum_{\nu=1}^{2^n} \int \int_{A_{\nu, n}} \rho^2(f(z)) \cdot 2^{-n} \cdot H(2^{-n}) dx dy. \quad (3)$$

Учитывая соотношение (2), получим

$$M(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Разделим области $A_{\nu, n}$ на два типа. К первому типу отнесем такие области $A_{\nu, n}$, что

$$\int \int_{A_{\nu, n}} \rho^2(f(z)) dx dy > 1. \quad (4)$$

При каждом фиксированном n , $n = 1, 2, \dots$ неравенство (4) имеет место для конечного числа индексов ν , $\nu = 1, \dots, m_n$ и согласно (3) можно считать, что

$$m_n < \frac{2^n a_n}{H(2^{-n})}.$$

Обозначим соответствующие областям $A_{\nu, n}$, $\nu = 1, \dots, m_n$ дуги ω_{ν} через $\gamma_{l, n}$, $1 \leq l \leq m_n$, а их длины через $|\gamma_{l, n}|$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{m_n} |\gamma_{\nu, n}| H(|\gamma_{\nu, n}|) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{m_n} 2\pi a \cdot 2^{-n} H(2\pi a \cdot 2^{-n}) \leq \\ &\leq 2\pi a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot m_n \cdot H(2\pi a \cdot 2^{-n}) < 2\pi a \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(2\pi a \cdot 2^{-n})}{H(2^{-n})} a_n. \end{aligned} \quad (5)$$

и так как $H(t)$ — монотонно возрастающая функция при $t \rightarrow 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H(2\pi n \cdot 2^{-n})}{H(2^{-n})} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Положим $E_a = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{m_n} \gamma_{ln}$. Тогда из неравенств (5) и (6) следует,

что $\Lambda_{H,H}(E_a) = 0$, и в силу леммы 1, $\text{cap}_H E_a = 0$. Положим $E = \bigcup_{a=1}^{\infty} E_a$, тогда $\text{cap}_H E = 0$.

Выберем точку $\xi_0 = e^{i\theta_0} \in \Gamma \setminus E$, в которой существует радиальный предел $\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta})$ и не ограничивая общности будем считать, что этот предел равен нулю. Поскольку точка ξ_0 лежит в дополнении множества E , то достаточно малая окрестность точки ξ_0 содержит не более чем конечное число областей A_{n_0} первого типа и значит существует такой номер n_0 , что для любого $n > n_0$ окрестность точки ξ_0 содержит область A_n второго типа. Поэтому начиная с некоторого номера $n_0 > 0$, для каждого $n > n_0$ существует такая область $A_n = \{z = re^{i\theta} \in D \mid |\theta - \theta_0| < 2\alpha \cdot 2^{-n}, r_{n-1} < r < r_{n+2}\}$, в которой $\int_{A_n} |\mu^2(f(z))| dx dy < 1$.

Поскольку полусфера Римана имеет площадь $\pi/2 > 1,5$ и площадь образа каждой области A_n , $n > n_0$, при отображении $f(z)$ не превосходит единицы, в круге $|\omega| < 1$ можно найти такое множество S_n площади большей 0,5, что при каждом $n > n_0$ функция $f(z)$ не принимает значений из S_n при $z \in A_n$. Рассмотрим класс всех измеримых на множестве S_n функций q , удовлетворяющих условию $|q(\omega)| \leq 1$, и зададим функцию $F_q^{(n)}(z)$

$$F_q^{(n)}(z) = \int_{S_n} \int \frac{q(\omega) du dv}{f(z) - \omega} \quad \omega = u + iv$$

голоморфную в A_n ; $n > n_0$. Функция $F_q^{(n)}(z)$ обладает следующими свойствами: а) существует константа C , $0 < C < \infty$, не зависящая от q и $n > n_0$, что

$$|F_q^{(n)}(z)| \leq C \quad z \in A_n \quad (7)$$

и б) существует числовая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, $\lim \varepsilon_n = 0$ не зависящая от q , что

$$\left| F_q^{(n)}(re^{i\theta_0}) - \int_{S_n} \int \frac{q(\omega) du dv}{-\omega} \right| \leq \varepsilon_n \quad r_{n-1} < r < r_{n+2} \quad (8)$$

В силу принципа гармонической мажоранты из (7) и (8) следует, что

$$\left| F_q^{(n)}(z) - \int_{S_n} \int \frac{q(\omega) du dv}{-\omega} \right| \leq \varepsilon_n$$

для любой функции $q(z)$, $|q(z)| \leq 1$ при $|\theta - \theta_0| \leq \alpha \cdot 2^{-n}$ $r_n < r < r_{n+1}$.

$n > n_0$ և $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Поэтому

$$\varepsilon_n > \sup_{|\theta|=1} \left| \iint_{S_n} \left(\frac{1}{f(z)-\omega} + \frac{1}{\omega} \right) q(\omega) \, dudv \right| = \iint_{S_n} \frac{|f(z)|}{|f(z)-\omega| |\omega|} \, dudv$$

откуда и следует, что $\operatorname{Im} f(z) = 0$, когда $z \rightarrow \xi_0 = e^{i\theta_0}$ и $z \in \{re^{i\theta} \in D; |\theta - \theta_0| \leq a \cdot 2^{-n}, 2^{-n-1} \leq r \leq 2^{-n}\}$. Другими словами в силу произвольности числа a , функция $f(z)$ стремится к угловому граничному значению $f(\theta_0) = 0$. Теорема доказана.

4. В статье ⁽³⁾ был доказан следующий результат: для произвольных $H \in C_H$ и $f \in T_H$ на Γ существует такое множество E , $\operatorname{cap}_H E = 0$, что в каждой точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ интегралы

$$L_f(\theta, \varphi) = \int_{h(\theta, \varphi)} \varphi(f(z)) |dz| \quad (8)$$

конечны для почти всех φ , $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ и если по некоторой хорде $h(\theta, \varphi)$ в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ интеграл $L_f(\theta, \varphi)$ бесконечен, то $h(\xi, \varphi)$ является сегментом Жюлиа функции $f(z)$, т. е. в каждом угле $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ содержащем хорду $h(\xi, \varphi)$ функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение из Ω , за возможными двумя исключениями. Объединяя этот результат с теоремой 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $H \in C_H$ и $f \in T_H$ — произвольны. Тогда на Γ можно указать такое множество E , $\operatorname{cap}_H E = 0$, что в каждой точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma \setminus E$ существует определенный предел $f(\theta)$ и интегралы $L_f(\theta, \varphi)$ конечны для всех φ , $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$.

Замечание 2. В случае $H(t) = t^{-1}$ эта теорема была доказана М. Цудзи ⁽⁴⁾, в случае $H(t) = t^{\alpha-1}$, $0 < \alpha < 1$, В. И. Гавриловым ⁽⁵⁾.

В заключение выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю В. И. Гаврилову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ս. Լ. ՐԵՐԵՐՅԱՆ

T_H դասի ֆունկցիաների անկյունային եզրային արժեքների մասին

Դիտարկվում են միավոր շրջանում սահմանափակ տեսքի մերոմորֆ ֆունկցիաների ենթադաս՝ *T_H* դասը, որը սահմանված է սֆերիկ ածանցյալի և դրական կիսաոսանցքի վրա անընդհատ և ոչ բացասական *H(t)* ֆունկցիայի օգնությամբ: Աշխատանքում ապացուցվում է *T_H* դասի ֆունկցիաների համար անկյունային եզրային արժեքների գոյությունը ամենուրեք միավոր

շրջանագծի վրա, բացի այն բազմություններից, որոնց բնութագիրը արվում է ուռուցիկ ունակության տերմիններով $H(t)$ ֆունկցիայի միջոցով սահմանված որոշակի հաջորդականության նկատմամբ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. С. Захарян, «Известия АН СССР», сер. матем., т. 27, № 4, 801—818 (1963).
² Н. К. Бари, Тригонометрические ряды, М., 1961. ³ В. И. Гаврилов, В. С. Захарян, «Известия АН Арм. ССР», сер. матем., 11, № 2, 113—123 (1976). ⁴ A. Beurling, Acta Math., 72, 1—13 (1940). ⁵ Л. Карлесон, Избранные проблемы теории исключительных множеств, М., Изд. «Мир», 1971. ⁶ М. Tsuji, Tohoku Math. J., 2, 113—125 (1950).
⁷ В. И. Гаврилов, Матем. сб. 94 (136), № 1(5), вып. 1, 3—15 (1974).