ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVI 1978 4

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

В. С. Захарян

Сегментные изменения потенциала типа Грина

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 21/II 1978)

1°. Пусть D единичный круг. Определим при $z, \zeta \in D$ функцию

$$A_\alpha(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-W_\alpha(z; \zeta)\}, \quad (-1<\alpha<\infty) \tag{1}$$

где

$$W_\alpha(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx - \right.$$

$$\left. - \bar{\zeta}^k\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k.$$

Следующую функцию назовем функцией типа Грина:

$$G_\alpha(z; \zeta) = -\log|A_\alpha(z; \zeta)|, \quad |z|<1, \quad |\zeta|<1. \tag{2}$$

Функция $A_\alpha(z; \zeta)$ введена М. М. Джрбашяном ([1]) при построении им теории факторизации классов N_α $(-1<\alpha<\infty)$ мероморфных в единичном круге функций.

Некоторые свойства функции $G_\alpha(z; \zeta)$ получены как в работе ([1]) М. М. Джрбашяна, так и в работе ([2]) автора при $-1<\alpha<0$.

Заметим, что при $\alpha=0$ имеем

$$A_0(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1-\bar{\zeta}z}\,\frac{|\zeta|}{\zeta}, \tag{3}$$

Следовательно

$$G_0(z; \zeta) = -\log\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar{\zeta}z}\right| \tag{4}$$

совпадает с обычной функцией Грина для D.

Пусть μ неотрицательное распределение массы на единичном круге D.

Потенциал типа Грина определим следующим образом

$$U_\alpha(z)=\int_D G_\alpha(z;\zeta)d\mu(\zeta). \tag{5}$$

В настоящей заметке приводятся теоремы как для оценки функции $U_\alpha(z)$ в D, так и конечности ее сегментного изменения.

В дальнейшем логарифмическую емкость множества E обозначим через $C_0(E)$, а β—емкость, при $0<\beta<1$, через $C_\beta(E)$.

2°. *Вспомогательные утверждения.* Из определения (2) и (1) легко усмотреть, что

$$G_\alpha(z;\zeta)=\operatorname{Re}[W_0(z;\zeta)-W_\alpha(z;\zeta)]-\log|A_0(z;\zeta)|. \tag{6}$$

Для дальнейшего заметим, что как известно (см. ([3]) стр. 44 и 48)

$$|W_0(z;\zeta)-W_\alpha(z;\zeta)|\leqslant c\left[\frac{1-|\zeta|}{|1-z\bar{\zeta}|}\right]^{1+\alpha},\quad z,\zeta\in D,\quad(-1<\alpha<0) \tag{7}$$

а также

$$|\operatorname{grad}[W_0(z;\zeta)-W_\alpha(z;\zeta)]|\leqslant c\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-z\bar{\zeta}|^{2+\alpha}},\quad z,\zeta\in D,\ (-1<\alpha<0) \tag{8}$$

где c—как здесь, так и в дальнейшем абсолютная постоянная.

Имеем также

$$|\operatorname{grad} G_0(z;\zeta)|=\frac{1-|\zeta|^2}{|1-z\bar{\zeta}||z-\zeta|}. \tag{9}$$

Имея в виду (8) и (9) из равенства (6) получим

$$|\operatorname{grad} G_\alpha(z;\zeta)|\leqslant c\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-z\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}+\frac{1-|\zeta|^2}{|1-z\bar{\zeta}||z-\zeta|}\quad(-1<\alpha<0). \tag{10}$$

Следующую лемму можно доказать с помощью леммы 3 работы ([3])

Лемма 1. *Пусть* $a,\zeta\in D$, $0\leqslant\theta<\pi$ *и* $z(r)=a+r(e^{i\theta}-a)$ *при* $0\leqslant r\leqslant 1$.

Тогда

$$\int_0^1\frac{dr}{|1-\bar{\zeta}z(r)|^{2+\alpha}}\leqslant\frac{c}{|e^{i\theta}-\zeta|^{1+\alpha}}\,(-1<\alpha<0).$$

Для доказательства основных теорем нам нужен также следующий результат Л. Карлесона ([4]), стр. 32.

Теорема А. *Пусть* $0<\rho<1$ *и*

$$\int_D(1-|\zeta|)^\beta d\mu(\zeta)<\infty$$

для некоторого фиксированного β, $0\leqslant\beta<1$. *Тогда для всех* θ, $0\leqslant\theta<2\pi$ *кроме быть может некоторого множества* E *с нулевой* β*—хаусдорфовской мерой при* $0<\beta<1$ *и* $C_0(E)=0$ *при* $\beta=0$, *функция* $U_0(z)$ *имеет конечное изменение на отрезке, соединяющем точки* $\rho e^{i\theta}$ *и* $e^{i\theta}$.

3°. *Основные теоремы*. Используя оценку (7) можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть* μ *удовлетворяет условию*

$$\int_D (1-|\zeta|)^{1+\alpha} d\mu(\zeta) < \infty, \quad (-1 < \alpha < 0).$$

Тогда функция $U_\alpha(z)$ *ограничена всюду в* D, *кроме быть может некоторого множества* E, *для которого* $C_{1+\alpha}(E)=0$ при $-1<\alpha<0$ *и* $C_0(E)=0$ *при* $\alpha=0$.

Пусть E компактное множество в D, для которого $C_{1+\alpha}(E)>0$. В связи с теоремой 1 интересно выяснить существует ли положительное распределение μ на E такое, что потенциал типа Грина на E становился $+\infty$ и был конечен на D/E.

При $\alpha=0$ теорема 1 и такой результат получены в работе ([5], стр. 152 и 271).

Для доказательства следующей теоремы используется оценка (10) и теорема A.

Теорема 2. *Пусть* $0<\rho<1$ *и*

$$\int_D (1-|\zeta|)^{1+\alpha} \log \frac{1}{1-|\zeta|} d\mu(\zeta) < \infty, \ (-1<\alpha<0).$$

Тогда для всех θ, $0\leqslant\theta<2\pi$, *кроме быть может некоторого множества* E, *для которого* $C_{1+\alpha}(E)=0$ *при* $-1<\alpha<0$, *и* $C_0(E)=0$ *при* $\alpha=0$ *функция* $U_\alpha(z)$ *имеет конечное изменение на сегменте* $[\rho e^{i\theta};\ e^{i\theta}]$.

Следующая теорема доказывается с помощью оценки (10), леммы 1 и того факта, что при $\alpha=0$ она справедлива ([6]).

Теорема 3. *Пусть* θ, *где* $0\leqslant\theta<\pi$, *фиксирована и*

$$\int_D \left[\frac{1-|\zeta|}{|e^{i\theta}-\zeta|}\right]^{1+\alpha} d\mu(\zeta) < \infty, \ (-1<\alpha\leqslant 0).$$

Если L — *дуга окружности в* D *с центром в* $e^{i\theta}$, *то для всех* a *на* L, *кроме быть может некоторого множества* E *на* L, *для которой* $C_0(E)=0$, *функция* $U_\alpha(z)$ *имеет конечное изменение на сегменте, соединяющем точки* $a\in L$ *с точкой* $e^{i\theta}$.

Отметим, что при $\alpha=0$ результаты двух последних теорем были получены в работе ([6]).

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

հաշվարկվում են Տյուրինգի մեքենաներով մուտքային բառի երկարության նկատմամբ բազմանդամային ժամանակում, իսկ $R=\{w\in R^*/\Gamma_w\}$, որտեղ՝

$$\Gamma_w(x)=\sum_{i=1}^{l(x)} 2^{l(x)-i}(1+w(2^i-1)):$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. И. Мальцев,* Алгоритмы и рекурсивные функции, «Наука», 1965. [2] *О. Б. Лупанов,* О синтезе некоторых классов управляющих систем, сб. «Проблемы кибернетики», вып. 10, М., Физматгиз, (63—97), 1963. [3] *Г. З. Саркисян,* Об одном понятии эффективной разрешимости предикатов, «Молодой научный работник», вып. 2(22), Изд. Ереванского университета, 1975. [4] *Г. З. Саркисян,* «Известия АН Арм. ССР», серия Математика, т. XIII, № 2 (1978). [5] *Р. М. Карп.* Сводимость комбинаторных проблем, Кибернетический сборник, вып. 12, изд. «Мир», М., 1975. [6] *А. А. Мучник,* О двух подходах к классификации рекурсивных функций, Проблемы математической логики, изд. «Мир», М., 1970. [7] *A. Cobham,* The intrinsic computational complexity of functions, Proc. 1964 International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Amsterdam, pp. 24—30, 1965. [8] *А. А. Левин,* Сигнализирующие вычислимых функций, Сложность вычислений и алгоритмов изд. „Мир", М., 1974. [9] *Х. Роджерс,* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, изд. „Мир", М., 1972. [10] *В. А. Успенский,* Лекции о вычислимых функциях, Физматгиз, М., 1960.