ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVI 1978 4

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Г. В. Вирабян

# О спектре одного класса самосопряженных квадратичных операторных пучков

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 30/I 1978)

Рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L(\lambda)=\lambda^2 I+\lambda B+C, \tag{1}$$

где относительно линейных ограниченных операторов $B$ и $C$, переводящих гильбертовое пространство $h$ в себя, предполагается:

1) оператор $B$ самосопряженный, $B=B^*$;

2) оператор $C$ самосопряженный равномерно отрицательно определенный, $C\leqslant\alpha I$ $(\alpha<0)$.

Обозначим через $H$ гильбертовое пространство, которое представляет ортогональную сумму двух копий гильбертова пространства $h$

$$H=h\oplus h, \tag{2}$$

со скалярным произведением

$$\langle\hat{u},\ \hat{v}\rangle=(-C\,u_1,\ v_1)+(u_2,\ v_2), \tag{3}$$

$$\hat{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix},\quad \hat{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\in H, \tag{4}$$

где $(\cdot\,,\cdot)$—исходное скалярное произведение гильбертова пространства $h$.

В пространстве $H$ рассмотрим матричный оператор

$$\Pi=\begin{pmatrix}O & I\\ -C & -B\end{pmatrix}, \tag{5}$$

который порождается квадратичным операторным пучком (1) при его линеаризации ([1]). При сделанных выше предположениях оператор $\Pi$ является самосопряженным по отношению скалярного произведения (3) ([2]).

В работах Р. А. Александряна и Р. З. Мкртчяна ([1-3]) для общего самосопряженного оператора дано новое усовершенствованное определение понятия классического спектра (так называемого ядра спектра), установлены признаки, характеризующие спектр самосопряженного оператора в терминах ядра спектра или асимптотического поведения резольвенты при приближении к точкам вещественной оси, а также исследован характер непрерывности обобщенных собственных функционалов этого оператора.

В настоящей статье вышеупомянутые результаты обобщаются для квадратичного самосопряженного операторного пучка (1).

П. 1. В этом пункте основные результаты работы ([4]) обобщаются для квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$. А именно: вводится новое определение ядра спектра и формулируются некоторые признаки, характеризующие спектр самосопряженного квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$.

Пусть $U_{ij}$ $(i, j=1, 2)$ попарно коммутирующие операторы, действующие в гильбертовом пространстве $h$. Рассмотрим матричный оператор $G$, который действует в гильбертовом пространстве $H$

$$G=\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Известно ([6]), что для обратимости операторной матрицы $G$ необходимо и достаточно, чтобы формальный детерминант

$$\Delta=U_{11}U_{22}-U_{12}U_{21} \tag{7}$$

был обратимым оператором и что тогда обратная операторная матрица имеет вид:

$$G^{-1}=\begin{pmatrix} U_{22}\Delta^{-1} & -U_{12}\Delta^{-1} \\ -U_{21}\Delta^{-1} & U_{11}\Delta^{-1} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Предположим, что область определения $G$ всюду плотна в $H$, а обратный оператор $G^{-1}$ является оператором Гильберта-Шмидта.

Рассмотрим операторную матрицу:

$$R_zG^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{z}+\frac{1}{z}L^{-1}(z)C & -L^{-1}(z) \\ L^{-1}(z)C & -zL^{-1}(z) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{22}\Delta^{-1} & -U_{12}\Delta^{-1} \\ -U_{21}\Delta^{-1} & U_{11}\Delta^{-1} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \left[-\frac{1}{z}+\frac{1}{z}L^{-1}(z)C\right]U_{22}\Delta^{-1}+L^{-1}(z)U_{21}\Delta^{-1} & \left[\frac{1}{z}-\frac{1^{-1}}{z}L^{-1}(z)C\right]U_{12}\Delta^{-1}-L^{-1}(z)U_{11}\Delta^{-1} \\ L^{-1}(z)CU_{22}\Delta^{-1}+zL^{-1}(z)U_{21}\Delta^{-1} & -L^{-1}(z)CU_{12}\Delta^{-1}-zL^{-1}(z)U_{11}\Delta^{-1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Здесь $R_z$ — резольвента матричного оператора П ([8]).

Положим:

$$\Phi_G(\lambda, \tau) = \frac{\tau}{\pi} \| R_{\lambda+i\tau} G^{-1} \|^2 = \frac{\tau}{\pi} \sup_{\|\hat{\varphi}\|_H = 1} \| R_{\lambda+i\tau} G^{-1} \hat{\varphi} \|_H^2 =$$

$$= \frac{\tau}{\pi} \sup_{\|(-C)^{1/2}\varphi_1\|_h^2 + \|\varphi_2\|_h^2 = 1} \Bigg\{ \Bigg\| (-C)^{1/2} \Bigg\{ \left[ -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} L^{-1}(z) C \right] U_{22} \Delta^{-1} \varphi_1 +$$

$$+ L^{-1}(z) U_{21} \Delta^{-1} \varphi_1 + \left[ \frac{1}{z} - \frac{1}{z} L^{-1}(z) C \right] U_{12} \Delta^{-1} \varphi_2 - L^{-1}(z) U_{11} \Delta^{-1} \varphi_2 \Bigg\} \Bigg\|_h^2 +$$

$$+ \| L^{-1}(z) C U_{22} \Delta^{-1} \varphi_1 + z L^{-1}(z) U_{21} \Delta^{-1} \varphi_1 - L^{-1}(z) C U_{12} \Delta^{-1} \varphi_2 -$$

$$- z L^{-1}(z) U_{11} \Delta^{-1} \varphi_2 \|_h^2. \qquad (10)$$

Обозначим

$$\Phi_G(\lambda) = \lim_{\tau \to +0} \Phi_G(\lambda, \tau). \qquad (11)$$

В работе [3] для квадратичного операторного пучка (1) нами было дано определение простого непрерывного спектра.

**Определение 1.** Спектр квадратичного операторного пучка (1) в $h$ назовем чисто точечным, лебеговским или сингулярным, если спектр самосопряженного оператора $\Pi$ в гильбертовом пространстве $H$ соответственно чисто точечный, лебеговский или сингулярный.

**Определение 2.** Ядром спектра квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ называется множество $S_G(L)$ точек $\lambda$ вещественной оси, в которых $\Phi_G(\lambda) > 0$, т. е.

$$S_G(L) = \{\lambda \in R^1; \quad \Phi_G(\lambda) > 0\}.$$

Легко теперь сформулировать соответствующие предложения работы [4] для квадратичного операторного пучка.

**Предложение 1.** Ядро спектра $S_G(L)$ квадратичного пучка $L(\lambda)$ есть подмножество его классического спектра, но обладает полной спектральной мерой.

**Предложение 2.** Как спектральная, так и лебеговская меры ядра спектра $S_G(L)$ пучка $L(\lambda)$ инвариантны относительно выбора операторной матрицы $G$.

**Предложение 3.** Ядро спектра $S_G(L)$ квадратичного пучка $L(\lambda)$ отличается от $S^*(L)$ на множество меры нуль как по спектральной, так и по лебеговской мерам, где

$$S^*(L) = \left\{ \lambda \in R^1; \quad \lim_{\tau \to +0} \frac{\tau}{\pi} \| R_{\lambda+i\tau} \hat{g} \|_H > 0 \right\}, \qquad \| \hat{g} \|_H = 1,$$

$\hat{g}$ — порождающий элемент оператора $\Pi$ в $H$.

**Предложение 4.** Для отсутствия непрерывной части спектра квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ достаточно, чтобы ядро спектра $S_G(L)$ состояло из не более чем счетного множества точек.

Предложение 5. Для отсутствия лебеговской части спектра квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ необходимо и достаточно, чтобы лебеговская мера ядра спектра $S_G(L)$ равнялась нулю.

Предложение 6. Для отсутствия сигулярной части спектра квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ достаточно, чтобы $\Phi_G(\lambda)$ была конечным для всех $\lambda \subset S_G(L)$, за исключением быть может счетного их числа.

Предложение 7. Для лебеговости спектра квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ с простым непрерывным спектром, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой операторной матрицы $G$, удовлетворяющей вышеупомянутым условиям, имело место равенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_G(\lambda) d\lambda = \| G^{-1} \|^2. \tag{12}$$

П. 2. В этом пункте исследуется характер непрерывности собственных функционалов квадратичного операторного пучка (1) построенных в [2].

Относительно матричного оператора $G$ предположим, что он неограниченный замкнутый оператор со всюду плотной областью определения $D(G)$ обратный к которому $G^{-1}$ (8) определен на всей области значений оператора $G$, совпадающей со всем $H$. Предположим, что $D(G)$ инвариантен относительно оператора П. Для векторов $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in D(G)$ введем новую норму по формуле

$$\|\hat{\varphi}\|^2 = \|G\hat{\varphi}\|^2_H = \|(-C)^{1/2}(U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2)\|^2_h + \|U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2\|^2_h. \tag{13}$$

Эта новая норма превращает линейное многообразие $D(G)$ в некоторое пространство Банаха $E_G$ и имеет место вложение

$$E_G \subset H \subset E^*_G. \tag{14}$$

Пусть спектр оператора П в гильбертовом пространстве $H$ простой. Тогда на основании теоремы 2 работы [7] при сделанных выше предположениях у оператора П имеется полная система собственных функционалов $T_\lambda(\hat{\varphi})$ непрерывных в топологии пространства $E_G$, и имеет место следующая формула разложения:

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda(\hat{f}) \overline{T_\lambda(\hat{\varphi})} d\rho(\lambda), \tag{15}$$

справедливая для всех $\hat{f}$ и $\hat{\varphi}$ из $D(G)$.

Обозначим через $D_1(G)$ ($D_2(G)$) множество первых (вторых) компонент всевозможных векторов $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ из линейного пространства $D(G)$. Положим:

$$D^{(1)}(G)=\left\{\hat{\varphi}_1=\begin{pmatrix}\varphi_1\\0\end{pmatrix};\ \varphi_1\in D_1(G)\right\};\quad D^{(2)}(G)=\left\{\hat{\varphi}_2=\begin{pmatrix}0\\\varphi_2\end{pmatrix};\ \varphi_2\in D_2(G)\right\}. \tag{16}$$

Относительно линейного пространства $D(G)$ предположим, что оно представляется как ортогональная сумма подпространств $D^{(i)}(G)$ $(i=1, 2)$

$$D(G)=D^{(1)}(G)+D^{(2)}(G). \tag{17}$$

Рассмотрим линейное многообразие

$$\Omega_L=D_2(G)=\left\{\varphi:\hat{\varphi}_2=\begin{pmatrix}0\\\varphi\end{pmatrix}\in D^{(2)}(G)\right\}. \tag{18}$$

В $\Omega_L$ введем новую норму по формуле

$$\|\varphi\|_L^2=\|\hat{\varphi}_2\|_0^2=\|(-C)^{1/2}U_{12}\varphi\|_h^2+\|U_{22}\varphi\|_h^2. \tag{19}$$

Покажем, что линейное пространство $\Omega_L$ инвариантно относительно квадратичного пучка $L(\lambda)$, т. е.

$$L(\lambda)\Omega_L\subset\Omega_L. \tag{20}$$

Пусть $\varphi\in\Omega_L$. Тогда вектор $\hat{\varphi}_2=\begin{pmatrix}0\\\varphi\end{pmatrix}\in D^{(2)}(G)$ и в силу инвариантности $D(G)$ относительно оператора П, $\Pi\begin{pmatrix}0\\\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi\\-B\varphi\end{pmatrix}\in D(G)$. Следовательно $B\varphi\in\Omega_L$. В силу (17) вектор $\begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix}\in D(G)$. Поэтому $\Pi\begin{pmatrix}\varphi\\0\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}0\\-C\varphi\end{pmatrix}\in D(G)$, т. е. $C\varphi\in\Omega_L$.

Таким образом линейное пространство $\Omega_L$ инвариантно относительно операторов $B$ и $C$ и следовательно относительно пучка $L(\lambda)$.

Рассмотрим систему линейных функционалов

$$t_\lambda(\varphi)=T_\lambda\begin{pmatrix}0\\\varphi\end{pmatrix};\qquad \varphi\in\Omega_L. \tag{21}$$

где $T_\lambda$—собственные функционалы оператора П.

Покажем, что $t_\lambda(\varphi)$ являются собственными функционалами для квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$. В самом деле имеем:

$$t_\lambda(L(\lambda)\varphi)=T_\lambda\begin{pmatrix}0\\L(\lambda)\varphi\end{pmatrix}=T_\lambda\begin{pmatrix}\lambda\varphi_1-\varphi_2\\\lambda\varphi_2+B\varphi_2+C\varphi_1\end{pmatrix}=T_\lambda(\Pi\hat{\varphi}-\lambda\hat{\varphi})=0; \tag{22}$$

где

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \lambda\varphi, \quad \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in D(G), \qquad \varphi \in \Omega_L \tag{23}$$

Собственные функционалы $T_\lambda$ ограничены по норме пространства $E_G$ ([7])

$$|T_\lambda(\hat{\varphi})| \leqslant K_\lambda \|\hat{\varphi}\|_0, \quad \hat{\varphi} \in E_G. \tag{24}$$

Поэтому

$$|t_\lambda(\varphi)|^2 = |T_\lambda(\hat{\varphi}_2)|^2 \leqslant K_\lambda^2 \|\hat{\varphi}_2\|_0^2 = K_\lambda^2 \{ \|(-C)^{1/2} U_{12}\varphi\|_H^2 + $$
$$+ \|U_{22}\varphi\|_H^2 \} = K_\lambda^2 \|\varphi\|_L^2, \quad \varphi \in \Omega_L \tag{25}$$

Далее для собственных функционалов $T_\lambda$ имеет место следующая формула разложения ([7])

$$<\hat{f}, \hat{\varphi}> = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda(\hat{f}) \overline{T_\lambda(\hat{\varphi})} d\rho(\lambda); \quad \hat{f} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in E_G. \tag{26}$$

Отсюда имеем:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \overline{T_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}} = \int_{-\infty}^{+\infty} t_\lambda(f) \cdot \overline{t_\lambda(\varphi)} d\rho(\lambda). \tag{27}$$

Таким образом нами доказана следующая

Теорема. *Пусть квадратичный операторный пучок $L(\lambda)$ имеет простой спектр, тогда при сделанных выше предположениях, у этого пучка имеется полная система собственных функционалов $t_\lambda(\varphi)$, для которых на линейном пространстве $\Omega_L$ выполняется неравенство* (25), *и имеет место следующая формула разложения*

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} t_\lambda(f) \overline{t_\lambda(\varphi)} d\rho(\lambda). \tag{28}$$

для всех $f, \varphi \in \Omega_L$.

Ереванский государственный университет

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲՅԱՆ

## Ինքնահամալուծ քառակուսային օպերատորային փնջերի մի դասի սպեկտրի մասին

*Ներկա աշխատանքում Ռ. Ա. Ալեքսանդրյանի և Ռ. Զ. Մկրտչյանի* ([3–5,7]) *աշխատանքներում ստացված որոշ արդյունքներն ընդհանրացվում են ինքնա* համալուծ քառակուսային օպերատորային փնջերի մի դասի համար։ Օպերատորային փնջերի դիտարկվող դասի համար մուծված է այսպես կոչված սպեկտրի կորիզի գաղափարը և ձևակերպված են սպեկտրը բնութագրող հայտանիշներ։ Հետազոտված է նույնպես փնջերի այդ դասի համար ([2]) աշխատանքում կառուցված սեփական ֆունկցիոնալների անընդհատության բնույթը և ստացված է ըստ սեփական ֆունկցիոնալների վերլուծության բանաձև (28)։

## ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ


[1] *М. Г. Крейн* и *Г. К. Лангер*, Труды Международного симпозиума по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды, Изд «Наука», 1965. [2] *Г. В. Вирабян*, «Известия АН Арм. ССР, т. XII, № 6 (1977). [3] *Р. А. Александрян* и *Р. З. Мкртчян*, «Известия АН Арм ССР», т. 1, № 1 (1966) [4] *Р. А. Александрян* и *Р. З. Мкртчян*, «Известия АН Арм. ССР», т. 7, № 1 (1972) [5] *Р. А. Александрян* и *Р. З. Мкртчян*, «Известия АН Арм. ССР», т. 5, № 2 (1970). [6] *П. Халмош*, Гильбертово пространство в задачах, Изд. «Мир», 1970 [7] *Р. А. Александрян* и *Р. З. Мкртчян*, «Известия АН Арм. ССР», т. 3, № 4—5 (1968).