

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

М. М. Мирзоян

# О теоремах максимальности для произвольных и мероморфных функций по касательным направлениям

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР Н. У. Аракелином 17/1 1978)

1. Пусть  $D$  обозначает единичный круг  $|z| < 1$ ,  $\Gamma$  — единичная окружность  $|z| = 1$ , и  $\Omega$  — сфера Римана. Для произвольных точек  $a$  и  $b \in D$  и произвольных подмножеств  $S_1, S_2 \subset D$ , неевклидово расстояние  $\sigma(a, b)$  между точками  $a$  и  $b$ , расстояние  $\sigma(a, S_2)$  между  $a$  и  $S_2$  и расстояние  $\sigma(S_1, S_2)$  между  $S_1$  и  $S_2$ , определяются формулами:

$$\sigma(a, b) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad \text{где } u = \left| \frac{a-b}{1-\bar{a}b} \right|, \quad \sigma(a, S_2) = \\ = \inf_{b \in S_2} \sigma(a, b), \quad \sigma(S_1, S_2) = \inf_{a \in S_1} \sigma(a, S_2).$$

Обозначим через  $h(\xi, \varphi)$ , хорду круга  $D$ , оканчивающуюся в точке  $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$  и образующую с радиусом в этой точке угол  $\varphi$ ,  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ . Пусть  $\Delta^*(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$  обозначает подобласть круга  $D$  ограниченную хордами  $h(\xi, \varphi_1)$ ,  $h(\xi, \varphi_2)$ ,  $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ ,  $-\pi/2 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi/2$  и окружностью  $|z - e^{i\theta}| = r$ ,  $0 < r < 1$ . Обычно  $\Delta^*(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$  или просто  $\Delta^*(\xi)$ , если нас не интересует размер этого угла, называют углом Штольца с вершиной в точке  $\xi \in \Gamma$ . Пусть  $\lambda(\xi)$  означает орицикл круга  $D$  в точке  $\xi \in \Gamma$  и  $O\Delta(\xi)$  обозначает орициклический угол ограниченными некоторыми орициклами  $\Lambda_1(\xi)$  и  $\Lambda_2(\xi)$  и окружностью  $|z - \xi| = r$ ,  $0 < r < 1$ .

Пусть  $\xi = e^{i\theta}$  произвольная точка на окружности  $\Gamma$ ,  $\zeta \in \Gamma$ . Назовем правым путем, оканчивающимся в точке  $\zeta \in \Gamma$ , всякую жордановую кривую  $L(\zeta)$ , которая задается непрерывной на  $[0, 1)$  функцией  $z = z(t)$  со свойствами:  $z(t) \in D$ ;  $\theta < \arg z \leq \theta + \pi/2$ ,  $|z - e^{i\theta}| < 1$ , при всех  $0 \leq t < 1$  и  $\lim_{t \rightarrow 1} z(t) = \zeta$ . Для произвольных действительных чисел

$\alpha$  и  $q$ ,  $0 < \alpha < \infty$ ,  $q \geq 0$  и произвольной точки  $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ , назовем правым  $q$  путем  $L_q^+(\xi, \alpha)$  в точке  $\xi \in \Gamma$ , всякий правый путь  $L^+(\xi) : z = z(t)$ ,

$0 \leq t < 1$ , оканчивающуюся в точке  $\xi$ , для которого  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{|\arg(z(t)) - \theta|^{q+1}}{1 - |z(t)|} = \alpha$

$=d$ . Обозначим через  $L_q^-(z, \alpha)$ ,  $0 < \alpha < \infty$ ,  $q \geq 0$  и назовем левым  $q$ -путем в точке  $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ , образ правого  $q$ -пути  $L_q^+(z, \alpha)$ , оканчивающегося в точке  $z$  при симметрии относительно радиуса  $h(z, 0)$  круга  $D$  в точке  $z$ . Теоретико-множественное объединение правых и левых  $q$ -путей  $L_q^+(z, \alpha)$  и  $L_q^-(z, \alpha)$ , оканчивающихся в точке  $z \in \Gamma$ , назовем  $q$ -путем в точке  $z$  и обозначим через  $L_q(z, \alpha)$ .

Для произвольных  $\alpha, \beta$  и  $q$ ,  $0 < \alpha < \beta < \infty$ ,  $q \geq 0$  и произвольной точки  $z = e^{i\theta} \in \Gamma$  назовем правым  $q$ -углом с вершиной в точке  $z \in \Gamma$  и обозначим через  $\Delta_q^+(z, \alpha, \beta, \delta)$  подобласть круга  $D$  ограниченную правыми  $q$ -путями  $L_q^-(z, \alpha)$ ,  $L_q^+(z, \beta)$ , оканчивающихся в точке  $z \in \Gamma$  и окружностью  $|z - z| = \delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , где  $\delta$  достаточно малое положительное число. Обозначим через  $\Delta_q^-(z, \alpha, \beta, \delta)$  и назовем левым  $q$ -углом с вершиной в точке  $z \in \Gamma$ , образ правого  $q$ -угла  $\Delta_q^+(z, \alpha, \beta, \delta)$  с той же вершиной при симметрии относительно радиуса  $h(z, 0)$ . Объединение правого и левого  $q$ -углов  $\Delta_q^+(z, \alpha, \beta, \delta)$ ,  $\Delta_q^-(z, \alpha, \beta, \delta)$  назовем  $q$ -углом с вершиной в точке  $z$  и обозначим через  $\Delta_q(z, \alpha, \beta, \delta)$  или просто  $\Delta_q(z)$ , если нас не интересуют размеры этого угла.

Нетрудно проверить, что части хорд (орициклов), оканчивающиеся в точке  $z = e^{i\theta} \in \Gamma$  и попавшие в круг  $|z - z| \leq 1$ , являются правыми или левыми 0-путями (1-путями) в точке  $z$ , в зависимости от знака  $\varphi$ , а углы Штольца  $\Delta^*(z, \varphi, -\varphi)$ ,  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ , (орициклические углы  $O\Delta(z)$ ) с вершиной в точке  $z \in \Gamma$ , являются 0-углами (1-углами) с той же вершиной.

2. Относительно  $q$ -путей и  $q$ -углов справедливы следующие три леммы, первые две из них дают оценки неевклидовых расстояний между двумя произвольными  $q$ -путями.

Лемма 1. Для любого положительного  $\varepsilon > 0$  и для любого  $q$ -пути  $L_q(z, \alpha)$  ( $0 < \alpha < \infty$ ,  $q \geq 0$ ,  $\alpha$  и  $q$  фиксированы) в точке  $z \in \Gamma$ , существует  $q$ -угол  $\Delta_q(z)$ , содержащий некоторый  $q$ -путь  $L_q(z, \alpha) \cap \{|z - z| < \delta, 0 < \delta < 1\}$ , и такой, что  $\Delta_q(z) \subset \{z \in D; \varepsilon(z, L_q(z, \alpha)) < \varepsilon\}$ .

Лемма 2. Для произвольных  $q$ -путей  $L_q(z, \alpha)$ ,  $L_q(z, \beta)$  ( $0 < \alpha < \beta < \infty$ ,  $q \geq 0$ ) в точке  $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ , существуют такие положительные постоянные  $\delta$  и  $c$ ,  $0 < \delta < 1$ ,  $c > 0$ , зависящие от  $\alpha, \beta$  и  $q$ , что  $\varepsilon(L_q(z, \alpha) \cap \{|z - z| < \delta\}; L_q(z, \beta) \cap \{|z - z| < \delta\}) \geq c$ .

Лемма 3. Для произвольных  $q$ -путей  $L_q(z, \alpha_1)$ ,  $L_q(z, \alpha_2)$ ,  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$ ,  $q \geq 0$  в точке  $z = e^{i\theta} \in \Gamma$ , существует такой  $q$ -угол  $\Delta_q^+(z, \beta_1, \beta_2, \delta)$ ,  $0 < \alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \infty$ ,  $0 < \delta < 1$ , что (i)  $\Delta_q^+(z, \beta_1, \beta_2, \delta) \subset \Delta_q^+(z, \alpha_1, \alpha_2, \gamma)$  для некоторого положительного  $\gamma > 0$ ,  $\gamma < \delta$ , (ii)  $\Delta_q^+(z, \beta_1, \beta_2, \delta)$  ограничены  $q$ -путями  $L_q^+(z, \beta_1)$ ,  $L_q^+(z, \beta_2)$  и окружностью  $|z - z| = \delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , где  $L_q^+(z, \beta_1) = \{z \in D; |z - z| = \beta_1 |\arg z - \theta|^{q+1}, 0 < |\arg z - \theta| \leq \pi/2\}$ ,  $L_q^+(z, \beta_2) = \{z \in D; |z - z| = \beta_2 |\arg z - \theta|^{q+1}, 0 < |\arg z - \theta| \leq \pi/2\}$ .

3. Рассмотрим произвольное отображение  $f: D \rightarrow \Omega$  и произвольное подмножество  $S$  круга  $D$ , для которого точка  $z \in \Gamma$  является пре-

дельной точкой. Предельным множеством  $C(f, \zeta, s)$  функции  $f$  в точке  $\zeta \in \Gamma$  по множеству  $S$  называют совокупность таких значений  $w \in \Omega$ , что  $w = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n^{(w)})$  по некоторой последовательности точек  $\{z_n^{(w)}\}$ ,  $z_n^{(w)} \in S$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n^{(w)} = \zeta$ . В качестве  $S$  можно брать хорду  $h(\zeta, \eta)$ .

орицикл  $\Lambda(\zeta)$ , угол Штольца  $\Delta^*(\zeta)$ , орициклический угол  $O\Delta(\zeta)$ ,  $q$ -путь  $L_q(\zeta, \alpha)$ ,  $q$ -угол  $\Delta_q(\zeta)$  или весь круг  $D$ .

Пусть  $A$  — произвольное конечное множество неотрицательных чисел и  $\zeta$  — произвольная точка окружности  $\Gamma$ ,  $\zeta \in \Gamma$ . Отнесем точку  $\zeta$  к множеству  $C_A(f)$  (соответственно  $C^*(f)$  или  $OC(f)$ ), если для любого  $q$ -угла  $\Delta_q(\zeta, \alpha, \beta, \delta)$ ,  $0 < \alpha < \beta < \infty$ ,  $0 < \delta < 1$ ,  $q \in A$  (соотн. угла Штольца  $\Delta^*(\zeta)$  или орициклического угла  $O\Delta(\zeta)$ ) с вершиной в точке  $\zeta \in \Gamma$  справедливо  $C(f, \zeta, \Delta_q(\zeta, \alpha, \beta, \delta)) = C(f, \zeta, D)$  (соответ.  $C(f, \zeta, \Delta^*(\zeta)) = C(f, \zeta, D)$ ) или  $C(f, \zeta, O\Delta(\zeta)) = C(f, \zeta, D)$ ). Нетрудно видеть, что для произвольной функции  $f(z)$ , определенной в круге  $D$  справедливы равенства:  $C_{[0]}(f) = C^*(f)$  и  $C_{[1]}(f) = OC(f)$ .

Полную характеристику множества  $C_A(f)$  для произвольных функций  $f: D \rightarrow \Omega$  дает следующая теорема, в которой символ  $\varepsilon E$  используется для обозначения дополнения множества  $E \subset \Gamma$  относительно  $\Gamma$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A$  — произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Тогда класс множеств  $\{\varepsilon C_A(f)\}$  для произвольных функций определенных в круге  $D$ , совпадает с классом  $\{C_A(f)\}$  для функции голоморфных и ограниченных в  $D$  и совпадает с классом множеств  $E \subset \Gamma$ , одновременно первой категории (по Бэру) и типа  $F_\sigma$  на  $\Gamma$ .

**Замечание 1.** В случае  $A = \{0\}$  эта теорема была установлена Е. П. Долженко ((<sup>1</sup>), стр. 249). В случае  $A = \{0, 1\}$  теорема 1 значительно усиливает один результат из ((<sup>2</sup>) лемма 1).

Построение примера в теореме 1 совершается в более общей ситуации, чем это определяется условиями теоремы 1. Чтобы сформулировать соответствующий результат, рассматриваем произвольное подмножество  $S_0$  круга  $D$ , обладающее свойствами: 1) множество  $\{|z|; z \in S_0\}$  плотно на некотором интервале  $[r_0, 1)$  действительной оси; 2) для любого  $\eta > 0$  существует такое  $\delta > 0$ , что  $|\arg z| < \eta$  для всех  $z \in S_0$ , лежащих внутри кольца  $1 - \delta < |z| < 1$ . Обозначим через  $S_1$  образ  $S_0$  при поворотах  $z' = e^{i\theta} z$ , так что  $S_1$  имеет на  $\Gamma$  единственную предельную точку  $z = e^{i\theta}$ .

**Теорема 2.** Пусть  $E$  произвольное множество первой категории (по Бэру) и типа  $F_\sigma$  на  $\Gamma$  и  $\{S_0\}$  — семейство множеств, обладающими названными выше свойствами. Тогда существует ограниченная и голоморфная в круге  $D$  функция  $f(z)$ , для которой:

$$E = \{\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma; C(f, \zeta, S_1) \neq C(f, \zeta, D)\}.$$

Теорема 2 является обращением теоремы Коллингвуда о максимальности ((<sup>3</sup>) стр. 117).

4. Пусть  $A$  — конечное множество неотрицательных чисел и  $\zeta$  — произвольная точка на окружности  $\Gamma$ ,  $\zeta \in \Gamma$ . Точку  $\zeta$  отнесем к множеству  $M_A(f)$  (соотв. к  $M(f)$  или  $OM(f)$ ) и назовем обобщенной  $A$  — точкой Мейера (соотв. точкой Мейера или орициклической точкой Мейера), если для произвольного  $q$ -пути  $L_q(\zeta, \alpha)$ ,  $0 < \alpha < \infty$ ,  $q \in A$  (соотв. хорды  $h(\zeta, \varphi)$ ,  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ , или орицикла  $\Lambda(\zeta)$ ) в точке  $\zeta \in \Gamma$  справедливо  $C(f, \zeta, L_q(\zeta, \alpha)) = C(f, \zeta, D) \neq \infty$  (соотв.  $C(f, \zeta, h(\zeta, \varphi)) = C(f, \zeta, D) \neq \infty$  или  $C(f, \zeta, \Lambda(\zeta)) = C(f, \zeta, D) \neq \infty$ ). Точку  $\zeta \in \Gamma$  отнесем к множеству  $I_A(f)$  (соотв.  $I(f)$  или  $OI(f)$ ) и назовем обобщенной  $A$  — точкой Плеснера (соотв. точкой Плеснера или орициклической точкой Плеснера), если для произвольного  $q$ -угла  $\Delta_q(\zeta, \alpha, \beta, \delta)$ ,  $0 < \alpha < \beta < \infty$ ,  $0 < \delta < 1$ ,  $q \in A$  (соотв. угла Штольца  $\Delta^*(\zeta)$  или орициклического угла  $O\Delta(\zeta)$ ) с вершиной в точке  $\zeta \in \Gamma$ , справедливо  $C(f, \zeta, \Delta_q(\zeta, \alpha, \beta, \delta)) = \infty$  (соотв.  $C(f, \zeta, \Delta^*(\zeta)) = \infty$  или  $C(f, \zeta, O\Delta(\zeta)) = \infty$ ).

В случае, когда  $A$  — состоит из одной точки  $A = \{q\}$ ,  $q \geq 0$ , то обобщенные  $A$  — точки Мейера и Плеснера назовем просто  $q$ -точкой Мейера и  $q$ -точкой Плеснера.

Замечание 2. Для произвольной мероморфной в круге  $D$  функции  $f(z)$ , справедливы следующие равенства  $I_{\{0\}}(f) = T(f)$ ,  $I_{\{1\}}(f) = OI(f)$ ,  $M_{\{0\}}(f) = M(f)$  и  $M_{\{1\}}(f) = OM(f)$ .

Связь между определенными выше множествами устанавливается следующей леммой.

Лемма 4. Для произвольной мероморфной в  $D$  функции  $f(z)$  и для произвольного конечного множества  $A$  неотрицательных чисел, справедливо разложение:

$$S_A(f) = M_A(f) \cup I_A(f).$$

В случае  $A = \{0\}$ , утверждение леммы 4 установлено в работе (\*). Объединяя результаты теоремы 1 и леммы 4 получаем теорему, являющуюся обобщением теоремы (стр. 204).

Теорема 3. Для произвольной функции  $f(z)$  мероморфной в круге  $D$  и для произвольного конечного множества  $A$  неотрицательных чисел, справедливо разложение:

$$\Gamma = M_A(f) \cup I_A(f) \cup E,$$

где  $E$  — множество первой категории и типа  $F_\sigma$  на  $\Gamma$ .

В случае  $A = \{0\}$  эта теорема была доказана в работе (\*). Она уточняет также результаты из статей (3) и (4) в случаях  $A = \{0, 1\}$  и  $A = \{q\}$  (уточнение касается типа множества  $E$ ).

Автор выражает искреннюю благодарность В. И. Гаврилову за постановку задачи и ценные указания.

Կամայական և մերմորֆ ֆունկցիաների շոշափող ուղղություններով  
մախիմալության բեռեմների մասին

Հոդվածում դիտարկվում են միավոր շրջանում մերմորֆ ֆունկցիաների  
և պրային վարքը շրջանագծի հետ կամայական շոշափման կարգ ունեցող  
ուղիների երկայնքով, Այդպիսի շոշափող ուղիների համար ընդհանրացվում  
են Դոլբենկոյի և Մալերի թեորեմները, ինչպես նաև տրվում է Կոլիննգվուդի  
մաքսիմալության թեորեմի շրջնալիությունը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- <sup>1</sup> Э. Коллингвуд, А. Ловатер, Теория предельных множеств, М., 1971. <sup>2</sup> А. Н. Айрипетян, В. И. Гаврилов, «Известия АН Арм ССР», сер. математика, № 5, 1976.  
<sup>3</sup> К. Мосиро, Предельные множества, М., 1963. <sup>4</sup> В. И. Гаврилов, А. И. Канатников, ДАН СССР, т. 233, № 1 (1977). <sup>5</sup> F. Bagemihl, Ann. Acad. Scient, Fenn Ser. A, № 385, p. 1—18, 1966. <sup>6</sup> H. Yoshida, Pacific J. Math. vol. 46, № 2, (1973).