ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVI 1978 3

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

Г. С. Сукиасян

О случайных треугольниках на плоскости

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 26/I 1978)

В работе дано комбинаторное представление для вероятностей попадания случайных треугольников в множества из некоторого кольца R. Результаты являются обобщением результатов работы ([1]) на более широкий класс множеств.

Исходным пунктом настоящей работы является предложенная Р. В. Амбарцумяном в ([1]) комбинаторная теория бюффоновых множеств в пространствах $G^n = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n \text{ раз}}$, где G—пространство прямых на плоскости с обычной топологией листа Мебиуса. Естественное соответствие между выпуклыми n—угольниками на плоскости и элементами G^n позволяет применить некоторые результаты из ([1]) в вопросах, связанных со случайными выпуклыми n-угольниками. В данной заметке мы ограничимся рассмотрением случайных треугольников.

Пусть T—пространство треугольников на плоскости с евклидовой топологией, связанной с описанием треугольника как тройки точек на плоскости.

Через G_3 обозначим множество троек прямых составляющих треугольник; G_3 получается из G^3 исключением троек прямых, содержащих параллельные прямые. G_3 гомеоморфно T, гомеоморфизм устанавливается с помощью естественного отображения $f:(g_1 g_2 g_3) \to t$.

Рассмотрим на плоскости конечное множество точек $\{P_i\}_{i=1}^n$; будем предполагать, что никакие три точки из $\{P_i\}_1^n$ не лежат на одной прямой. Пусть $\{\bar{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$—множество отрезков (игл), соединяющих всевозможные пары точек из $\{P_i\}_1^n$. Согласно ([1]), бюффоновыми называются множества, принадлежащие кольцу r_3 подмножеств G^3, которое порождается множествами

$$[\bar{s}_{i_1 j_1}] \times [\bar{s}_{i_2 j_2}] \times [\bar{s}_{i_3 j_3}], \quad i_k, j_k = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, 3;$$

здесь и далее используется обозначение:

$$[x] = \{g \in G : g \cap x \neq \varnothing\}.$$

Гомеоморфизм f позволяет перенести понятие бюффонова множества в пространство T.

Определение. *Множество $A \subset T$ называется бюффоновым, если $f^{-1}(A) \in r_3$.*

Для всякой вероятности P на T со свойством

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{3} \{f(g_1 g_2 g_3) \in T : g_k \in [P_i]\}\right)=0; \quad i=1, 2, \ldots, n;$$

(вероятность каждого пучка треугольников равна нулю) на бюффоновых подмножествах T имеет место [1] следующее комбинаторное представление:

$$P(A)=\frac{1}{4^3} \sum_{\alpha} C_\alpha(A)\, p_\alpha; \quad f^{-1}(A) \in r_3, \tag{1}$$

где α пробегает множество $\{1, 2, \ldots, n\}^6$,

$$p_\alpha = p(\delta_{i_1 j_1}; \delta_{i_2 j_2}; \delta_{i_3 j_3}) \equiv P(f([\delta_{i_1 j_1}] \times [\delta_{i_2 j_2}] \times [\delta_{i_3 j_3}] \cap G_3)),$$

$$\alpha=(i_1, j_1; i_2, j_2; i_3, j_3).$$

$C_\alpha(A)$ — целочисленные коэффициенты, не зависящие от вида P.

Коэффициенты $C_\alpha(A)$ определяются следующим образом. Рассмотрим достаточно малую окрестность ε тройки прямых $(g_{i_1 j_1}; g_{i_2 j_2}; g_{i_3 j_3})$, где g_{ij}—прямая, проходящая через точки P_i и P_j. Малая окрестность прямой $g_{i_k j_k}$ $(k=1, 2, 3)$ исключением пучков $[P_{i_k}]$ и $[P_{j_k}]$ разбивается на 4 несвязные компоненты. Соответственно этому в ε можно рассмотреть 4^3 открытых непересекающихся частичных окрестностей ε_n. Обозначим через $I_A(\alpha, n)$, $n=1, 2, \ldots, 4^3$ значение на ε_n индикаторной функции $I_A(g_1 g_2 g_3) = \begin{cases} 1 & \text{если } f(g_1 g_2 g_3) \in A, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$

Каждой частичной окрестности ε_n $n=1, 2, \ldots, 4^3$ поставим в соответствие число $a(n)=I_{[\delta_{i_1 j_1}]}(g_1)+I_{[\delta_{i_2 j_2}]}(g_2)+I_{[\delta_{i_3 j_3}]}(g_3)$; $(g_1 g_2 g_3) \in \varepsilon_n$, где

$$I_B(g)=\begin{cases} 1 & \text{если } g \in B,\ B \subset G, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Коэффициент $C_\alpha(A)$ равен следующей сумме $C_\alpha(A)=\sum_{n=1}^{64} (-1)^{a(n)+1} I_A(\alpha, n)$.

Нашей целью является вывод аналога комбинаторной формулы (1) для некоторых, вообще говоря, не бюффоновых элементов конечной алгебры A подмножеств T.

Пусть задано конечное множество точек $\{P_i\}_1^n \subset R^2$. Предположим, что множество $\{P_i\}_1^n$ невырождено в следующем смысле: никакие три точки из $\{P_i\}_1^n$ не лежат на одной прямой, и никакие четыре не являются вершинами трапеции. Рассмотрим множества

$$A_i=\{t \in T : P_i \subset t\}, \quad i=1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим через A минимальную алгебру подмножеств T, содержащую A_i, $i=1, 2, \ldots, n$. Атомами алгебры A являются множества

$$A_J=\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j \in J^c} A_j'\right),$$

где J — какое-нибудь подмножество множества индексов $\{1, 2, \ldots n\}$. Другими словами A_J есть событие, состоящее в том, что точки $\{P_j\}_{j\in J}$ оказываются внутри, а $\{P_j\}_{j\in J^c}$ — вне случайного треугольника.

В данной работе решение задачи получено для кольца R тех элементов A из $\mathcal{A}$, для которых $f^{-1}(A)$ ограничено в пространстве G^3. Как было указано в ([1]), ограниченные множества из $\mathcal{A}$ являются бюффоновыми. Из ограниченности $A \subset T$ следует ограниченность $f^{-1}(A)$ в G^3, однако обратное неверно. Действительно, легко построить кольца R содержащие множества, отличные от бюффоновых. Осложнения, связанные с рассмотрением общих элементов $A \in \mathcal{A}$, вызваны тем, что $\partial f^{-1}(A)$, вообще говоря, имеет непустое пересечение с ∂G_3.

Рассмотрим следующие части ∂G_3:

$$G_{\text{III}} = \{(g_1 g_2 g_3) \in G^3 : g_1 \parallel g_2 \parallel g_3\}, \quad (\parallel \text{—знак параллельности})$$
$$G_{\text{II}} = G^3 \setminus (G_3 \cup G_{\text{III}}).$$

Упрощения, достигаемые рассмотрением лишь $A \in R$ связаны с леммой 1.

Лемма 1. *Если $A \in R$, то $\overline{f^{-1}(A)} \cap G_{\text{III}} = \varnothing$.*
Имеет место также следующая лемма.

Лемма 2. *Для того чтобы множество $A \in R$ было бюффоновым необходимо и достаточно, чтобы $\overline{f^{-1}(A)} \cap G_{\text{II}} = \varnothing$.*
Из лемм 1 и 2 следует

Следствие. *Множество $A \in R$ является бюффоновым т. и т. т. когда оно ограничено.*

Лемма 3. *Для каждого $A \in R$ существует последовательность бюффоновых множеств $\{B_n\}$ такая, что $B_n \underset{n\to\infty}{\uparrow} A$* (монотонная сходимость). В результате соответствующего предельного перехода и получается теорема 1. Для ее формулировки нам потребуются следующие обозначения.

Каждой пятерке $\beta = (i_1 j_1;\ i_2 j_2;\ i_3) \in \{1, 2, \cdots n\}^5$ поставим в соответствие тройку прямых $(g_{i_1 j_1};\ g_{i_2 j_2};\ g_\beta) \in G_{\text{II}}$, где g_β—прямая проходящая через P_{i_3} параллельно $g_{i_1 j_1}$. Тройка прямых $(g_{i_1 j_1}, g_{i_2 j_2}, g_\beta)$ образует на плоскости две полуполосы — части плоскости ограниченные двумя параллельными прямыми и секущей. Обозначим через B множество тех β, для которых все пять точек P_{i_1}; P_{j_1}; P_{i_2}; P_{j_2}; P_{i_3} лежат на границе одной полуполосы (рис. 1). Пусть δ_β — луч исходящий из P_{i_3} и лежащий на границе этой полуполосы. Положим

$$p_\beta = p(\delta_{i_1 j_1}, \delta_{i_2 j_2};\ \delta_\beta).$$

Назовем двузубцем объединение двух вертикальных углов с попарно параллельными сторонами (рис. 2). Обозначим через Γ множество двузубцев γ со свойствами:

1) Вершины P_{i_1} и P_{i_2} принадлежат совокупности $\{P_i\}_1^n$.

2) Внутри γ не содержится точек из $\{P_i\}_1^n$.

3) Границе γ принадлежат две точки из $|P_i|_1^*$, отличные от вершин P_{i_1} и P_{i_2}. (Граница двузубца состоит из прямолинейных участков имеющих две различные ориентации. В силу условия невырожденности $|P_i|_1^*$, упомянутые две точки на границе γ всегда принадлежат участкам с разной ориентацией).

Предположим, что существует следующая плотность

$$h_{i_1 j_1 i_2 j_2}(\varphi)d\varphi = p(\delta_{i_1 j_1};\ \delta_{i_2\varphi};\ \delta_{i_2\varphi+d\varphi}) - p(\delta_{i_1 j_1};\ \delta_{i_2\varphi};\ \delta_{i_2\varphi}),$$

где $\delta_{i\varphi}$ — луч с началом P_i и направлением φ, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Интеграл от $h_{i_1 j_1 i_2 j_2}(\varphi)$ по углу двузубца $\gamma \in \Gamma$ обозначим через $p_{i_1 j_1 \gamma}$.

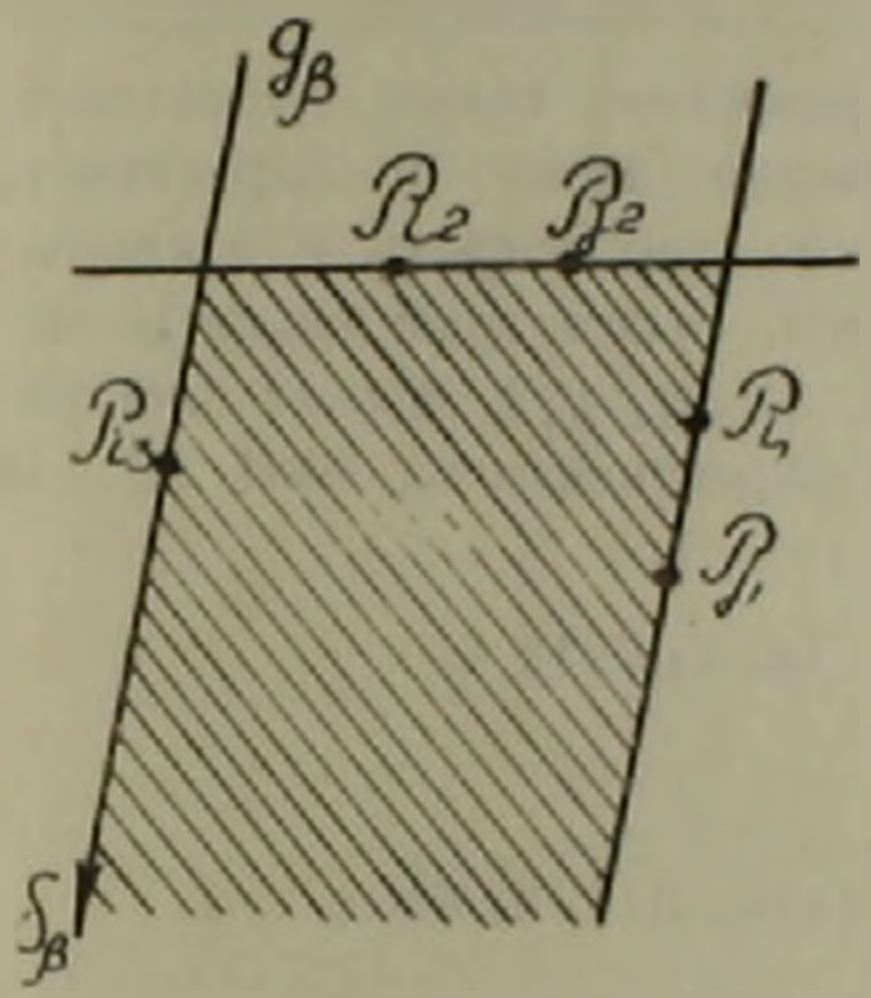

Рис. 1

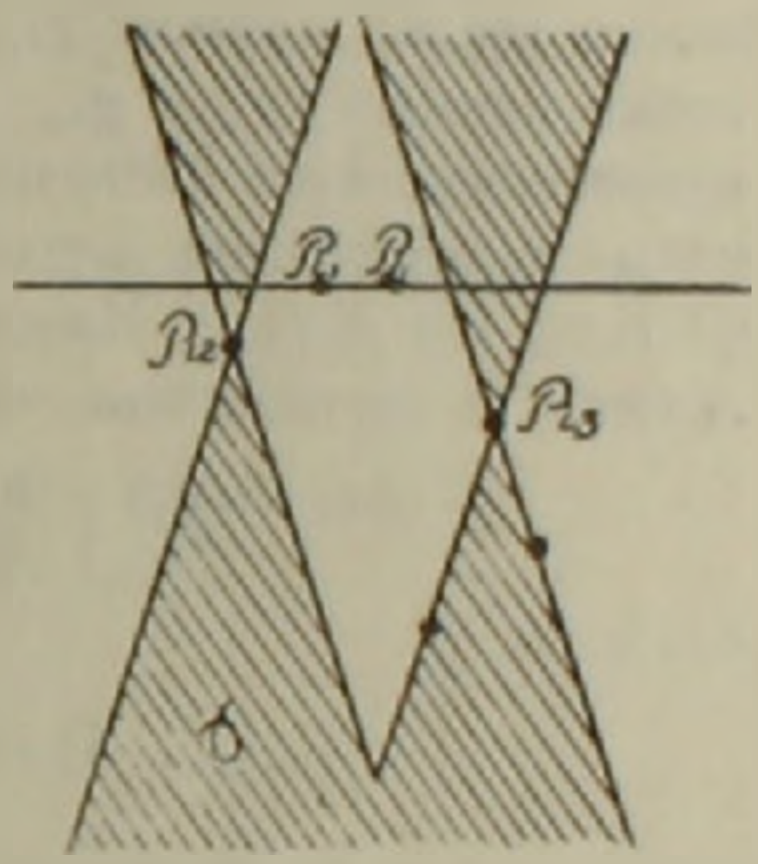

Рис. 2

Теорема 1. *Для всякой вероятности P на T, обращающейся в нуль на пучках треугольников и любого A из кольца R имеет место следующее комбинаторное представление*

$$P(A) = \frac{1}{4^3}\Big(\sum_{\alpha} C_\alpha(A)\, p_\alpha + \sum_{\beta\in B} C_\beta(A)\, p_\beta + \sum_{i,j} \sum_{\gamma\in\Gamma} C_{ij\gamma}(A)\, p_{ij\gamma} \Big) \qquad (2)$$

$C_\alpha(A)$; $C_\beta(A)$; $C_{ij\gamma}(A)$ — целочисленные коэффициенты, не зависящие от выбора вероятности P.

Коэффициенты $C_\beta(A)$ и $C_{ij\gamma}(A)$ определяются следующим образом. Для каждой пятерки $\beta = (i_1 j_1;\ i_2 j_2;\ i_3) \in B$ рассмотрим достаточно малую окрестность ε тройки прямых $(g_{i_1 j_1};\ g_{i_2 j_2};\ g_\beta)$. Рассмотрим в ε следующие 32 непересекающиеся частичные окрестности. Окрестность прямой $g_{i_k j_k}$ $(k=1,\ 2)$ разбивается на 4 несвязные компоненты исключением пучков $|P_{i_k}|$ и $|P_{j_k}|$. Окрестность прямой g_β исключением пучков $|P_{i_3}|$ и $\{g \in G : g \parallel g_\beta\}$ также разбивается на 4 несвязные компоненты, рассмотрим две такие компоненты, элементы которых пересекаются с $g_{i_1 j_1}$ в той полуплоскости относительно $g_{i_2 j_2}$, где лежит $\delta_{i_3 \varphi}$. Каждой компоненте ε_n, $n = 1, 2, \ldots, 32$ поставим в соответствие число

$$a(n)=\underset{[\delta_{i_1j_1}]}{I}(g_1)+\underset{[\delta_{i_2j_2}]}{I}(g_2)+\underset{[\delta_{\cdot}]}{I}(g_3);\quad (g_1g_2g_3)\in\varepsilon_n.$$

Тогда

$$C_\beta(A)=\sum_{n=1}^{32}(-1)^{a(n)+1}I_A(\beta,n),$$

где $I_A(\beta, n)$—значение индикаторной функции $I_A(g_1g_2g_3)$ на ε_n.

Для каждого двузубца γ с вершинами P_{i_2} и P_{i_3} рассмотрим такое φ, для которого прямые $g_{i_2\varphi}$ и $g_{i_3\varphi}$ лежат внутри γ, где $g_{i\varphi}$—прямая проходящая через точку P_i по направлению φ. Малую окрестность прямой $g_{i_k\varphi}$, $k=2, 3$ разобьем на 4 несвязные компоненты исключением пучков $[P_{i_k}]$ и $\{g\in G: g\parallel g_{i_k\varphi}\}$. На 4 несвязные компоненты исключением пучков $[P_{i_1}]$ и $[P_{j_1}]$ разобьем также окрестность фиксированной прямой $g_{i_1j_1}$. Соответственно этому в окрестности тройки прямых $(g_{i_1j_1}; g_{i_2\varphi}; g_{i_3\varphi})\in G_{\text{II}}$ можно рассмотреть 4^3 открытых непересекающихся частичных окрестностей. Рассмотрим такие 16 частичных окрестностей, элементы которых $(g_1; g_2; g_3)$ имеют свойство $g_2\in[\delta_{i_2\varphi}]$ и $g_3\in[\delta_{i_3\varphi}]$. Каждой частичной окрестности ε_n, $n=1, 2,\ldots, 16$ поставим в соответствие число

$$a(n)=\underset{[\delta_{i_1j_1}]}{I}(g_1)+\underset{[\delta_{i_2\varphi}]}{I}(g_2)+\underset{[\delta_{i_3\varphi}]}{I}(g_3);\qquad (g_1g_2g_3)\in\varepsilon_n$$

Положим

$$C_{i_1j_1i_2i_3\varphi}(A)=\sum_{n=1}^{16}(-1)^{a(n)+1}I_A(i_1, j_1, \gamma, \varphi, n);$$

где $I_A(i_1; j_1; \gamma; \varphi, n)$—значение функции $I_A(g_1g_2g_3)$ на ε_n.

Внутри угла двузубца $\gamma\in\Gamma$ $C_{i_1j_1i_2i_3\varphi}(A)$ не зависит от φ, его значение примем за $C_{i_1j_1\gamma}(A)$.

Коэффициенты $C_\beta(A)$ и $C_{i_1j_1\gamma}(A)$ отличны от нуля, если тройки прямых $(g_{i_1j_1}; g_{i_2j_2}; g_3)$, $(g_{i_1j_1}; g_{i_2\varphi}; g_{i_3\varphi})\in G_{\text{II}}$ лежат в $\overline{f^{-1}(A)}$. Согласно лемме 2, если $A\in R$ является бюффоновым, то $C_\beta(A)=C_{i_1j_1\gamma}(A)=0$ для всех β и γ. Следовательно, равенство (1) является следствием теоремы 1 для случая бюффоновых множеств.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
комплексного электрооборудования

Հ. Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ

Հարթության վրա պատահական եռանկյունների մասին

Եռանկյունների տարածության մեջ սահմանվում է սահմանափակ բազմությունների որոշ R վերջավոր օղակ։ Դիտարկվում են պատահական եռանկյունների այդ օղակի բազմությունների մեջ ընկնելու հավանականությունները։ Վերջիններիս համար տրվում է կոմբինատոր ներկայացում, որի գործակիցները կախված չեն պատահական եռանկյան բաշխումից։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *R. V. Ambartzumian*. Stochastic Geometry from the Standpoint of Integral Geometry — Advances Appl. Prob. December vol. 1977.