

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

Э. А. Стороженко

О скорости приближения функций классов H^p , $0 < p \leq 1$

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талалайном 16/1 1978)

1. Одним из важных вопросов теории функций комплексного переменного является исследование поведения степенного ряда на границе круга сходимости. В связи с этим выделяются различные классы аналитических функций, имеющих граничные значения. Наиболее широкое распространение получили классы Харди H^p , $0 < p < \infty$, для аналитических в единичном круге функций f , определяемых условием

$$H^p = \{f : \lim_{r \rightarrow 1-0} M_p(r, f) = H_p(f) < \infty\}.$$

где

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^p d\varphi \right\}^{1/p}, \quad 0 < p < \infty$$

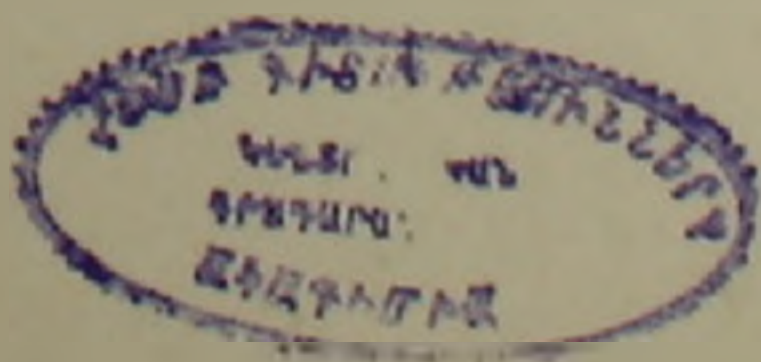
При изучении свойств граничной функции возникает задача о возможности представления в определенном смысле функции рядом Тейлора на единичной окружности. В этом направлении классы H^p для $p > 1$ достаточно хорошо изучены, так как ряд Тейлора на единичной окружности является рядом Фурье граничной функции. При $0 < p < 1$ классы H^p еще мало исследованы. Сюда в первую очередь следует отнести результаты Ф. Рисса (¹):

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi}) - f(e^{i\varphi})|^p d\varphi = 0, \quad 0 < p < \infty \quad (1)$$

и Харди—Литтлвуда (²) о возможности суммирования ряда методами Чезаро (C, α) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n^\alpha(e^{i\varphi}, f) - f(e^{i\varphi})|^p d\varphi = 0, \quad \alpha > 1/p - 1, \quad 0 < p < 1.$$

(Равенство (1) означает суммирование методом Абеля—Пуассона).



Для „критического“ показателя $\alpha = 1/p - 1$ и значений $p \in (0, 1/2]$ И. Сунухи (3,4) установил „максимальные“ неравенства:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sup_n |\sigma_n^\alpha(e^{i\varphi}, f)|^p d\varphi \leq A(p) \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\varphi})|^p \log^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + A'(p) \right\} \quad (2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \sup_n |\sigma_n^\alpha(e^{i\varphi}, f)|^p d\varphi \leq A(p, \mu) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\varphi})|^p d\varphi \right)^\mu, \quad 0 < \mu < 1.$$

Остался открытым вопрос о справедливости (2) при $1/2 < p < 1$.

В данной статье мы приведем ряд оценок, связанных со скоростью суммирования ряда Тейлора на единичной окружности методами Абеля—Пуассона, Чезаро и Валле—Пуссена, а также сформулируем аналоги теорем Джексона в классах H^p , $0 < p \leq 1$. Кроме того, отметим, что неравенства (2) верны для всех $p \in (0, 1)$.

2. Модулем непрерывности порядка k функции $f \in H^p$, $0 < p < \infty$, называется

$$\sup_{0 < |h| < 1} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(e^{i(\varphi+mh)}) \right|^p d\varphi \right\}^{1/p} = \omega_k(\delta, f)_p.$$

Вместо $\omega_1(\delta, f)_p$ будем просто писать $\omega(\delta, f)_p$. Обозначим также

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\varphi})|^p d\varphi \right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty.$$

Теорема 1. Пусть $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$ и k — натуральное число. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{m=0}^k (-1)^{k-m} \binom{k}{m} f(r^m e^{i\varphi}) \right|^p d\varphi \leq A(k) \omega_k^p(1-r, f)_p, \quad 1 > r \geq r_0$$

Если $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, то

$$\sigma_n^\alpha(z; f) = (A_n^\alpha)^{-1} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} S_k(z; f),$$

где $S_k(z, f) = \sum_{l=0}^k c_l z^l$, A_n^α — коэффициенты биномиального ряда, т. е.

$$(1-x)^{-(1+\alpha)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n.$$

Теорема 2. Если $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$, то

$$\|f - \sigma_n^a\|_p \leq A(\alpha, p) \omega(1/n, f)_p \begin{cases} 1, & \alpha > 1/p - 1 \\ |\ln(n+2)|^{1/p}, & \alpha = 1/p - 1 \\ n^{1/p - (\alpha+1)}, & -1 < \alpha < 1/p - 1 \end{cases}$$

при $n \geq n_0(\alpha, p)$.

Окончательный характер теоремы 2 показывает

Теорема 3. Для любых фиксированных p ($0 < p < 1$) и α ($-1 < \alpha < \infty$) существует функция $f_0 = f_0(\alpha, p)$ из HP , для которой

$$\|f_0 - \sigma_n^a\|_p > B(\alpha, p) \omega(1/n, f)_p \begin{cases} 1, & \alpha > 1/p - 1 \\ |\ln(n+2)|^{1/p}, & \alpha = 1/p - 1 \\ n^{1/p - (\alpha+1)}, & -1 < \alpha < 1/p - 1 \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 опирается на формулу Пуассона специального вида

$$f(re^{it}) = [g(r)]^{-1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(Re^{it+\tau}) g(Re^{it}) P(r/R) d\tau, \quad 0 < r < R < 1,$$

где f и g аналитичны внутри единичного круга, $g(|z|) \neq 0$, $0 < |z| < 1$ и

$P(r, t) = \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|}$ — ядро Пуассона. Оценки в теореме 2 получены сразу для всех α благодаря специальному интегральному представлению средних Чезаро

$$\begin{aligned} \sigma_n^a(e^{it}, f) &= \frac{(A_n^a)^{-1}(-1)^n}{2^n 2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it+\tau}) (re^{it})^{-n} \Delta_{n/n}^m (1-re^{it})^{-(1+\alpha)} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} (re^{it})^{-n} \Delta_{n/n}^k f(re^{it+\tau}) \Delta_{n/n}^{m-k} (1-re^{it+k\tau})^{-(1+\alpha)} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

Представление (3) удобно использовать и для оценок $\| \sigma_n^a - f \|_p$ при $p > 1$, которые в случае отрицательных значений α ($-1 < \alpha < 0$), возможно еще неизвестны:

$$\|f - \sigma_n^a\|_p \leq C(\alpha, p) n^{-\alpha} \omega(1/n, f)_p, \quad p > 1$$

3. Обозначим через $E_n(f)_p$ наилучшее приближение функции f тригонометрическим многочленом $T_n = \sum_{k=0}^n a_k e^{ikt}$

$$E_n(f)_p = \inf_{T_n} \|f - T_n\|_p.$$

Теорема 4. Если $f \in HP$, $0 < p \leq 1$ и m — натуральное число, то

$$E_n(f)_p \leq A(m, p) \omega_m \left(\frac{1}{n+1}, f \right)_p, \quad n=0, 1, \dots \quad (4)$$

В частности

$$A(1, p) \leq \frac{\sqrt{e}}{6} (6/\pi)^{1/p} \Gamma \left(\frac{3}{p} + 1 \right).$$

(Γ — гамма-функция Эйлера).

Приближающий многочлен, осуществляющий оценку (4), имеет вид

$$\frac{(-1)^{m-1}}{A_n^s} \sum_{k=1}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r^k e^{i(k\varphi+l)}) \frac{(re^{i\varphi})^{-n}}{(1-re^{i\varphi})^{1+s}} d\varphi,$$

где r и a выбраны надлежащим образом.

Теорема 5. Если k — натуральное число, $f^{(k)} \in H^p$, $0 < p < 1$, то

$$E_n(f)_p \leq A(k, l, p) (n+1)^{-k} \omega_e \left(\frac{1}{n+1}, \frac{\partial^k f}{\partial \varphi^k} \right)_p, \quad l=0, 1, \dots, \quad n \geq n_0(p, k).$$

(Под $\frac{\partial^k f}{\partial \varphi^k}$ здесь понимается предельная функция аналитической функции $\frac{\partial^k f(re^{i\varphi})}{\partial \varphi^k}$).

В доказательстве теоремы 5 существенную роль играет следующее утверждение: если k — натуральное число и $f^{(k)} \in H^p$, $0 < p < 1$, то существуют такие числа $B(p, k)$ и $C(p, k)$, что для всех $0 < \delta \leq B(p, k)$ выполняется неравенство

$$\omega_{k+l}(\delta, f) \leq C(p, k) \delta^k \omega_e \left(\delta, \frac{\partial^k f}{\partial \varphi^k} \right)_p, \quad l=0, 1, \dots \quad (5)$$

В классах H^p , $p \geq 1$, неравенство (5) имеет место для всех $\delta > 0$ с коэффициентом, равным единице, и теорема 5 справедлива для всех $n \geq 0$. В. И. Иванов ⁽³⁾ показал, что в L^p , $0 < p < 1$,

$$\sup_{T_m} E_0(T_m)_p \|T_m\|_p^{-1} = \sup_{T_m} E_0(T_m)_p (\omega(2\pi, T_m)_p)^{-1} = \infty$$

поэтому в этих пространствах аналог теоремы 5 при $n=0$ невозможен.

4. По аналогии с $\sigma_n^s(z; f)$ определим „запаздывающие“ средние Валле-Пуссена v_n^s :

$$v_n^s(z; f) = (A_n^s)^{-1} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{s-1} S_{n+k}(z; f).$$

Теорема 6. Пусть $f \in H^p$, $0 < p \leq 1$, и целое $\alpha > 1/p - 1$. Тогда

$$\|f - v_n^s\|_p \leq A(\alpha, p) E_n(f)_p.$$

Эта теорема доказывается на основании представления v_n^s в виде

$$\frac{(A_n^*)^{-1}}{2\pi} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\varphi})}{(1-re^{i\varphi})} | (re^{i\varphi})^{-2^{k-1}(n+1)+1} - (re^{i\varphi})^{-2^k(n+1)+1} | \times \\ \times \sum_{\lambda_1+\dots+\lambda_k=n} |1-(re^{i\varphi})^{-1}|^{-\lambda_1} \dots |1-(re^{i\varphi})^{-1}|^{-\lambda_k} d\varphi, \quad 0 < r < 1.$$

5. „Максимальные“ неравенства (2) остаются справедливыми для всех значений $p \in (0, 1)$, т. е. имеет место.

Теорема 7. Пусть $0 < p < 1$, $\alpha = 1/p - 1$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sup_n |\sigma_n^\alpha(e^{i\varphi}, f)|^p d\varphi \leq A(p) \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\varphi})|^p \log^+ |f(e^{i\varphi})| d\varphi + A'(p)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sup_n |\sigma_n^\alpha(e^{i\varphi}, f)|^{p'} d\varphi \leq A(p, p') \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\varphi})|^p d\varphi \right)^{p'/p}, \quad 0 < p < 1$$

Центральным моментом доказательства является применение некоторой теоремы вложения, обобщающей известный результат Харди—Литтлвуда (⁶) о вложении $H^q \subset H^p$, $q > p > 0$.

Приведенные выше результаты докладывались нами на Всесоюзной школе по современным проблемам теории функций (Баку, май 1977 г.) и на семинаре Д. Е. Меньшова и П. Л. Ульянова по теории функций в Московском университете (сентябрь 1977 г.).

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Է. Ս. ՍՏՈՐՈՋՆԻԿՈՒ

H^p , $0 < p \leq 1$ դասերի ֆունկցիաների մոտարկման առաջադրյալն մասին

Հոդվածում քննարկված են մի շարք գնահատականներ Թեյլորի շարքի միավոր շրջանագծի վրա Արելի, Ջեդարոյի և Վալլե-Պուսսենի մեթոդներով գումարվելու առաջադրյալների վերաբերյալ և ձևակերպված են Ջեկսոնի թեորեմի անալոգները H^p , $0 < p \leq 1$ դասերի համար:

Բացի այդ, Ջեդարոյի միջինների համար $0 < p \leq 1/2$ դեպքում, նախկինում ապացուցված մաքսիմալ անհավասարությունները տարածված են նաև այն դեպքերի վրա, երբ $1/2 < p < 1$:

Վերոհիշյալ արդյունքների ապացույցները հիմնված են շարդի-Լիթլվուդի եկրորման թեորեմների ընդհանրացման վրա:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ F. Riesz, Math. Zeit., 18 (1923). ² Y. H. Hardy and Y. E. Littlewood, Proc. London Math. Soc. 36 (1934). ³ Y. Sunouchi, Tôhoku Math. Journ. 7 (1955). ⁴ Y. Sunouchi, Tôhoku Math. Journ. 8 (1956). ⁵ В. И. Ивасков, Труды международной конференции по теории приближения функций, изд. Наука, М., 1977. ⁶ Y. H. Hardy and Y. E. Littlewood, Math. Zeit., 34 (1931).