ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVI 1978 3

УДК 519 27

МАТЕМАТИКА

С. К. Потосян

Асимптотика распределения числа частиц в гиббсовском ансамбле

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 4/XI 1977)

Известно ([1–6]), что в случае гиббсовского ансамбля в конечном сосуде $\Lambda\subset R^\nu$ (или $\Lambda\subset Z^\nu$), $\nu=1, 2, \ldots$, при достаточно малых значениях активности z распределение флуктуаций числа частиц $(\sim|\Lambda|^{1/2})$ в этом сосуде является асимптотически нормальным (при $|\Lambda|\to\infty$) с точностью до поправки порядка $o(|\Lambda|^{-1/2})$, где через $|\Lambda|$ обозначен ν-мерный объем сосуда Λ. Аналогичное утверждение справедливо и для распределения числа частиц в конечном сосуде, вычисленное относительно предельного распределения Гиббса.

В предлагаемой заметке, в обоих случаях, для распределения числа частиц мы находим следующий член асимптотики по Λ. В случае распределения в конечном сосуде для самих коэффициентов асимптотики, зависящих, вообще говоря, от формы сосуда, мы также приводим асимптотическое разложение (при $|\Lambda|\to\infty$), основанное на общем асимптотическом разложении для логарифма статистической суммы ([7,8]).

Перейдем к точным формулировкам. Пусть задана физическая система с парным эвклидово-инвариантным потенциалом взаимодействия $U(x)$, $x\in R^\nu\setminus\{0\}$, где U—дважды непрерывно дифференцируемая функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности вместе со своими производными, положительная в некоторой окрестности нуля и с не более чем степенным ростом в нуле, как самой функции, так и ее производных. (Более подробно, условия, накладываемые на потенциал U, приведены в ([8])).

Пусть A—некоторое направленное множество. Рассмотрим семейство выпуклых, ограниченных сосудов $\Lambda_\alpha\subset R^\nu$, $\alpha\in A$, границы $\Gamma(\Lambda_\alpha)$, которых являются трижды кусочно-дифференцируемыми $\nu-1$-мерными подмногообразиями в R^ν, и удовлетворяющих условию $\lim_A|\Lambda_\alpha|=\infty$. Тогда $\Gamma(\Lambda_\alpha)$, в окрестности любой своей гладкой точки

$x \in \Gamma(\Lambda_\alpha)$, в некоторой прямоугольной системе координат ($\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(\nu-1)}$, η) с началом в точке x, задается уравнением

$$\eta = f_{\alpha,x}(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(\nu-1)})$$

где $f_{\alpha,x}$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция. Мы предполагаем также, что для семейства границ $\Gamma(\Lambda_\alpha)$ выполнено условие: для любого мультииндекса $s=(s_1, \ldots, s_{\nu-1})$ такого, что $|s| \leqslant 3$, имеет место оценка

$$\sup_{x \in \Gamma(\Lambda_\alpha)} \sup_{\xi} |f^{(s)}_{\alpha,x}(\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(\nu-1)})| \leqslant a|\Lambda_\alpha|^{\frac{-|s|+1}{\nu}},$$

где $a>0$ — константа, не зависящая от α. (Более подробно, см. ([8])).

Пусть, для любого ограниченного сосуда $\Lambda \subset R^\nu$, $P_{\Lambda,U,\beta,z}$ есть распределение Гиббса, определенное на всех конечных конфигурациях $c \subset \Lambda$ и порожденное потенциалом U, где z (активность) и β (обратная температура) — некоторые положительные параметры. Положим $P^{(\alpha)}_N = P_{\Lambda_\alpha,U,\beta,z}(c \subset \Lambda_\alpha : N(c)=N)$, где $N \geqslant 0$ — целое число, а $N(c)$ — число частиц в конфигурации c.

Теорема 1. *Пусть, активность z достаточно мала. Тогда для любого числа $d>0$ и всех N таких, что $|\bar{N}_\alpha - N| < d|\Lambda|^{1/2}$, где $\bar{N}_\alpha$ — среднее число частиц в сосуде Λ_α, вычисленное относительно распределения $P_{\Lambda_\alpha,U,\beta,z}$, справедлива следующая асимптотика*

$$P^{(\alpha)}_N = (2\pi F_1(\Lambda_\alpha)|\Lambda_\alpha|)^{-1/2} e^{-\frac{(\bar{N}_\alpha - N)^2}{2F_1(\Lambda_\alpha)|\Lambda_\alpha|}} \times \left\{ 1 + \frac{F_2(\Lambda_\alpha)(\bar{N}_\alpha - N)}{2F_1^2(\Lambda_\alpha)|\Lambda_\alpha|} + o(|\Lambda_\alpha|^{-1}) \right\} \quad (1)$$

равномерно относительно всех N в указанном промежутке, где коэффициенты $F_i(\Lambda_\alpha)$, $i=1, 2$, имеют асимптотики

$$F_i(\Lambda_\alpha) = h_i(U, \beta, z) + q_i(U, \beta, z) \frac{S(\Gamma(\Lambda_\alpha))}{|\Lambda_\alpha|} + 0(|\Lambda_\alpha|^{(\nu-2)/\nu}), \ i=1, 2, \quad (2)$$

где $S(\Gamma(\Lambda_\alpha))$ — площадь поверхности $\Gamma(\Lambda_\alpha)$, а коэффициенты h_i и q_i, $i=1, 2$, зависят только от потенциала U и параметров z и β.

Доказательство этой теоремы основано на разложении характеристической функции числа частиц, что в свою очередь связано с разложением логарифма статистической суммы, приведенным в работе ([8]).

Замечание. Пользуясь методами упомянутых работ ([1]) и ([8]), можно получить и дальнейшие члены, как разложения (1), так и (2).

В случае предельного распределения Гиббса ([10]), верен следующий аналог теоремы 1

Теорема 2. *Пусть $P_{U,\beta,z}$ — предельное распределение Гиббса и активность z достаточно мала. Тогда, для любого числа $d>0$ и всех N таких, что $|\bar{N}_\alpha - N| < d|\Lambda|^{1/2}$, где $\bar{N}_\alpha$ — среднее число частиц* *в сосуде Λ_0, вычисленное относительно предельного распределения Гиббса, справедлива асимптотика*

$$P_{U,\beta,z}(c\subset R^\nu : N(c\cap\Lambda_0)=N) = (2\pi h_1(U,\beta,z)|\Lambda_0|)^{-1/2}\times$$

$$\times e^{-\frac{(\bar{N}_0-N)^2}{2h_1(U,\beta,z)|\Lambda_0|}}\left\{1+\frac{h_2(U,z,\beta)(\bar{N}_0-N)}{2h_1(U,z,\beta)|\Lambda_0|}+o(|\Lambda_0|^{-1})\right\}.$$

В заключение приношу благодарность Р. А. Минлосу за постановку задачи и полезные обсуждения.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Ս. Կ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ

Գիբսյան անսամբլում մասնիկների թվի բաշխման ասիմպտոտիկան

Դիցուք տրված է գիբսյան անսամբլ վերջավոր անոթում $\Lambda\subset R^\nu$, *(կամ* $\Lambda\subset Z^\nu$), $\nu=1, 2,\ldots$: *Հայտնի է, որ z ակտիվության բավականաչափ փոքր արժեքների համար* Λ *անոթում մասնիկների թվի ֆլուկտուացիայի բաշխումը ասիմպտոտիկորեն նորմալ է: Նույնը ճիշտ է նաև վերջավոր անոթում մասնիկների թվի բաշխման համար, հաշված Գիբսի սահմանային բաշխման նկատմամբ: Նշված երկու դեպքերում ստացված է մասնիկների թվի բաշխման համար ասիմպտոտիկայի հաջորդ անդամը:*

Այդ մեթոդով կարելի է նույնպես ստանալ ասիմպտոտիկայի հաջորդ անդամները:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. М. Халфина*, Матем. сб., 80, 1, 3—51 (1969). [2] *Р. А. Минлос, А. М. Халфина*, „Известия АН СССР" сер. матем. 34, 5, 1173—1191 (1970). [3] *G. Del Grosso*, Comm. Math. Phys., 37, 141—160 (1974). [4] *А. Хаитов*, Труды Моск. матем. об-ва, 28, 215—260 (1973). [5] *Р. А. Минлос, А. Хаитов*, Труды Моск. матем. об-ва, 32, 147—186 (1975). [6] *Б. С. Нахапетян*, ДАН Арм. ССР, т. 61, №4, 210—213 (1975). [7] *Ф. Г. Абдулла-Заде, Р. А. Минлос, С. К. Погосян*, сб. статей, Многокомпонентные случайные системы, „Наука" (1977). [8] *С. К. Погосян*, „Известия АН Арм. ССР," сер. матем., т. 13, №3 (1978). [9] *Р. А. Минлос, С. К. Погосян*, ТМФ, т. 31, №2, 199—213 (1977). [10] *Р. А. Минлос*, Функц. анализ, 1, вып. 2, 60—73 (1967).