

УДК 519.1

МАТЕМАТИКА

С. Х. Дарбинян

Обходы в турнирах

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 26/X 1977)

В настоящей статье рассматриваются конечные турниры. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь можно найти в работе (1).

Через $T_p = (V_p, W_p)$ обозначим p -вершинный турнир, где V_p множество его вершин, а W_p —множество дуг.

Турнир T_{2n+1} (T_{2n}) называется регулярным (почти регулярным), если для любой вершины u имеет место $s^+(u) = n$ (соответственно $|s^+(u) - s^-(u)| = 1$), где $n \geq 1$, а $s^+(u)$ и $s^-(u)$ означают полустепени исхода и захода вершины соответственно.

Через $[m, n]$ обозначим множество целых чисел не меньших m и не больших n .

Дж. Мун (2) доказал, что в сильно связном p -вершинном турнире всякая вершина находится на цикле длины m , для любого $m \in [3, p]$. Б. Алспач (3) доказал, что в каждом $(2n+1)$ -вершинном регулярном турнире, где $n \geq 1$, всякая дуга находится на цикле длины m , для любого $m \in [3, 2n+1]$. Б. Алспач, К. Рейд и Д. Роселли (4) доказал, что в каждом $(2n+1)$ -вершинном регулярном турнире, где $n \geq 3$, для всякой дуги (u, v) и для любого $m \in [3, 2n]$ существует путь длины m от вершины u к вершине v .

Под r -путем будем понимать простой путь длины r .

Для любых целых $p \geq 3$ и $r \geq 1$, для любой пары вершин u, v турнира $T_p = (V_p, W_p)$ и для любого подмножества $U \subset V_p \setminus \{u, v\}$ через $Q_r^+(u, v, U)$ обозначим множество r -путей турнира T_p , ведущие от u к v и не проходящие через вершины множества U .

Очевидно имеют место следующие утверждения:

Лемма 1. Если $R = (v_0, v_1, \dots, v_r)$ — r -путь в турнире T_p , $u \notin R$ и для некоторых i, j , где $p \geq 3$, $0 \leq i < j \leq r-1$, имеет место $(v_i, u), (u, v_j) \in W_p$, то существует $(r+1)$ -путь от вершины v_0 к v_r , проходящий через вершины $v_0, v_1, \dots, v_r, u$.

Лемма 2. Пусть $R = (v_0, v_1, \dots, v_r)$ — r -путь в турнире T_p , $u \notin R$ и для всех $i \in [0, t]$, $j \in [s, t]$, где $1 \leq t \leq s \leq r-1$, $3 \leq r \leq p-2$

имеет место, соответственно, $(u, v_i) \in W_p$, $(v_j, u) \in W_p$. Если для некоторого $(v_{i_1}, v_{i_2}) \in W_p$, где $i_1 \leq \min\{i_2 - 2, i_2 - 1\}$, $i_2 \in [2, r-1]$ существует такое $j \in [\max\{i_2 + 1, s + 1\}, r]$, что $(v_{i_1}, v_j) \in W_p$, то существует $(r+1)$ -путь от вершины v_0 к v_r , проходящий через вершины $v_0, v_1, \dots, v_r, u$.

Лемма 3. В любом турнире T_p , где $p \geq 1$ существует вершина u (соответственно v) с $s^+(u) \geq \lfloor p/2 \rfloor$ ($s^-(v) \geq \lfloor p/2 \rfloor$).

Для турнира $T_{2n+1} = (V_{2n+1}, W_{2n+1})$ введем следующие обозначения:

$$S^+(v) = \{u \in V_{2n+1} / (v, u) \in W_{2n+1}\},$$

$$S^-(v) = \{u \in V_{2n+1} / (u, v) \in W_{2n+1}\}.$$

Теорема 1. В каждом регулярном турнире $T_{2n+1} = (V_{2n+1}, W_{2n+1})$ для любого подмножества $U \subset V_{2n+1}$ для любой пары вершин $u, v \in V_{2n+1} \setminus U$, где $2 \leq |U| \leq \left\lfloor \frac{n-2}{3} \right\rfloor$ и для любого $m \in [3, 2n - |U|]$, имеет место $Q_{T_{2n+1}}^m(u, v, U) \neq \emptyset$.

Доказательство проводится методом индукции по длине r -путей. Простой проверкой, легко убедиться, в справедливости утверждения теоремы при $m=3$.

Пусть $(u=v_0, \dots, v_r=v) \in Q_{T_{2n+1}}^m(u, v, U)$. $A = V_{2n+1} \setminus (\{v_0, \dots, v_r\} \cup U)$.

Для доказательства индукционного шага рассматриваются следующие возможные случаи:

- I. $A \cap S^-(v_r) \neq \emptyset$,
- II. $A \cap S^-(v_{r-1}) \neq \emptyset$,
- III. $A \cap S^+(v_0) \neq \emptyset$,
- IV. $A \cap S^+(v_1) \neq \emptyset$,
- V. $A \cap S^+(v_i) = \emptyset$, $A \cap S^-(v_j) = \emptyset$, где $i=0, 1, \dots, i=r-1, r$.

Подробно остановимся на случае I.

Пользуясь леммой 1 можем предполагать, что $(x, v_i) \in W_{2n+1}$ для всех $i \in [0, r-1]$ и $x \in (A \cap S^-(v_r))$.

Ia. $A \cap S^+(v_0) \neq \emptyset$.

Если для некоторого $z \in (A \cap S^+(v_0))$ существует такое $i \in [1, r-1]$, что $(z, v_i) \in W_{2n+1}$ или существует такая вершина $x \in (A \cap S^-(v_r))$, что $(z, x) \in W_{2n+1}$, то существование $(r+1)$ -пути требуемого вида очевидно.

Допустим, что $(v_i, z) \in W_{2n+1}$ и $(x, z) \in W_{2n+1}$ для всех $i \in [1, r-1]$, $x \in (S^-(v_r) \cap A)$ и $z \in (A \cap S^+(v_0))$. Тогда $r \leq n - m_1 - 1$, где $m_1 = |A \cap S^-(v_r)|$.

Пусть $z \in (A \cap S^+(v_0))$ — произвольная вершина. Легко заметить, что $|A \cap S^+(z)| \geq n - k + 1$, где $k = |U| + 1$. Следовательно, существует такая вершина $x \in (A \cap S^+(z))$, что $(x, v_i) \in W_{2n+1}$ для некоторого $i \in [2, r-1]$ или $(x, y) \in W_{2n+1}$ для некоторой вершины $y \in (A \cap S^-(v_r))$.

Поэтому $(v_0, \dots, v_{l-2}, z, x, v_l, \dots, v_r) \in Q_{T_{2n+1}}^{r-1}(u, v, U)$ или $(v_0, \dots, v_{r-2}, z, x, y, v_r) \in Q_{T_{2n+1}}^{r+1}(u, v, U)$.

$$16. A \cap S^+(v_0) = \emptyset.$$

Заметим, что $r \geq n - k + 1$ и рассмотрим множества $A \cap S^-(z)$, где $z \in (A \cap S^-(v_r))$. Нетрудно заметить, что $|A \cap S^-(z)| \geq n - k + 1$. Следовательно существует такое $i \in [1, r-2]$ и такая вершина $y \in (A \cap S^-(z))$, что $(v_l, y) \in W_{2n+1}$ и $(v_0, \dots, v_l, y, z, v_{l+2}, \dots, v_r) \in Q_{T_{2n+1}}^{r+1}(u, v, U)$.

Случай II доказывается аналогичным образом. Случаи III и IV следуют, соответственно, из I и II с помощью принципа ориентированной двойственности. Для доказательства случая V достаточно разбить его на подслучаи $|A| \geq |U| + 3$ и $|A| \leq |U| + 2$ и воспользоваться леммами 1–3.

В работе (2) доказана.

Теорема 2. Для любого турнира $T_p = (V_p, W_p)$ существует содержащий его регулярный турнир $T_{p+1}(T_p)$, где $p \geq 1$ и $d(T_p) = \max_{v \in V_p} |s^+(v) - s^-(v)|$.

С помощью теорем 1 и 2 легко доказать, что имеет место.

Теорема 3. Если для турнира T_p имеет место $d(T_p) + 1 \leq \left\lfloor \frac{p + d(T_p) + 1}{6} \right\rfloor$, то для всякой его пары вершин u, v и для любого $m \in [3, p-1]$ в T_p существует путь длины m от вершины u к v .

Замечание 1. Следующий пример показывает, что верхняя оценка мощности подмножества U в теореме 1 не улучшаема:

Действительно, пусть $k = |U| + 1 = \frac{n+2}{3} \geq 3$ — целое число.

$T_{2n-k} = (V_{2n-k}, W_{2n-k})$ — некоторый турнир, где подмножества вершин $X_1 = \{v_1, \dots, v_{n-k-1}\}$ и $X_2 = \{v_{n-k}, \dots, v_{2n-2k-2}\}$ составляют регулярные турниры (соответственно T_{n-k-1}^1 и T_{n-k-1}^2), а множество $X_3 = \{v_{2n-2k-1}, \dots, v_{2n-k-3}\}$ составляет регулярный или почти регулярный турнир T_{k-1}^3 .

Запись $\{u_1, \dots, u_p\} \rightarrow \{v_1, \dots, v_q\}$ означает, что для любых $i \in [1, p]$ и $j \in [1, q]$ имеет место $(u_i, v_j) \in W_{2n-k}$. W_{2n-k} содержит также следующие дуги:

$$X_1 \rightarrow X_2 \cup \{v_{2n-k-2}, v_{2n-k-1}, v_{2n-k}\}, X_2 \rightarrow X_3,$$

$$X_3 \rightarrow X_1 \cup \{v_{2n-k}\}, \{v_{n-k-2}\} \rightarrow X_2 \cup \{v_{2n-k-1}, v_{2n-k}\} \cup X_1,$$

$$\{v_{2n-k-1}\} \rightarrow X_2 \cup X_3 \cup \{v_{2n-k}\}, \{v_{2n-k}\} \rightarrow X_2.$$

Легко заметить, что $d(T_{2n-k}) = k + 1$. Пользуясь теоремой 2 можно из T_{2n-k} получить регулярный турнир T_{2n+1} , в котором $Q_{T_{2n+1}}^1(v_{2n-k-2}, v_{2n-k}, X_3) = \emptyset$.

Замечание 2. Для каждого n ($n \geq 5$) существует $(2n+1)$ -

вершинный регулярный турнир в котором имеется тройка вершин x_1, x_2, x_{n+1} такие, что $Q_{T_{2n+1}}(x_1, x_2, x_{n+1}) = \emptyset$.

Действительно, чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть следующий турнир:

$$T_{2n+1} = (|x_1, \dots, x_{2n+1}|, \bigcup_{i=1}^{2n+1} \bigcup_{j=1}^n |(x_i, x_{i+j})|), \text{ где } x_{2n+1+i} = x_i \text{ для } i \geq 1.$$

В заключении считаю своим долгом выразить благодарности А. В. Петросяну и К. М. Мовсисяну за внимание к работе.

Вычислительный центр Академии наук Армянской ССР и
Ереванского государственного университета

Ա. Կ. ՆԱԴԵՐՆԱՆ

Շրջանցումներ մրցաշարերում

Դիցուք $T_p = (V_p, W_p)$ -ն p -զազաթանի մրցաշար է: $Q_{T_p}(u, v, U)$ -ով նշանակենք u -ից դուրս եկող և v -ն մտնող ախ r -երկարություն պարզ ճանապարհների բազմությունը, որոնք չեն անցնում $U \subseteq W_p - \{u, v\}$ ենթաբազմությունը պատկանող զազաթաներով:

Յուզ է տրվում, որ՝

1) $T_{2n+1} = (V_{2n+1}, W'_{2n+1})$ համասեռ մրցաշարի համալսական u, v զազաթաների, $U \subseteq W'_{2n+1} - \{u, v\}$ ենթաբազմություն և $r \in |3, 2n - |U||$ թվի համար տեղի ունի $Q_{T_{2n+1}}(u, v, U) \neq \emptyset$, որտեղ՝ $3 \leq |U| + 1 \leq \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor$:

2) Եթե T_p մրցաշարի համար տեղի ունի

$$d(T_p) + 1 \leq \left\lfloor \frac{p + d(T_p) + 1}{6} \right\rfloor \quad \text{անհավասարությունը,}$$

որտեղ՝

$$d(T_p) = \max_{x \in V_p} |s^+(x) - s^-(x)|,$$

այսինքն u, v զազաթաների և $m \in |3, p-1|$ թվի համար գոյություն ունի u -ից դուրս եկող և v մտնող m երկարություն պարզ ճանապարհ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Փ. Харари, Теория графов, Мир, М., 1973. ² J. W. Moon, On subournaments of a tournament, Canad. Math. Bull. 9, 297—301 (1966). ³ B. Alspach, Cycles of each length in regular tournaments, Canad. Math. Bull. Vol. 10, N. 2, 283—286 (1967). ⁴ B. Alspach, K. B. Reid and D. P. Roselle, Bypasses in Asymmetric Digraphs, Q. Combinatorial Theory, Vol. 17, No. 1, 11—18 (1974). ⁵ G. W. Moon, Some mapping problems for tournaments, Graph Theory and its Applications (B. Harris, editor), Academic Press, New York, 133—148 1970.