ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVI 1978 3

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

А. С. Овакимян

Обобщенная проблема моментов Стилтьеса для класса $L_p(\varphi)$

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. Н. Мергеляном 29/VI 1977)

Пусть $L_p(\varphi)$ есть класс функций, для которых:

$$\| f \|_{L_p}=\left(\int\limits_0^\infty |f(t)|^p\varphi(t)dt\right)^{1/p}<\infty,$$

где $\varphi(t)$ положительная функция для всех $t>0$.

В работе рассматривается следующий вариант проблемы моментов Стилтьеса: для заданной последовательности положительных чисел:

$$0=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_n<\cdots\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu}=\infty,\quad \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_\nu^2}<\infty$$

указать условия, наложенные на последовательность положительных чисел $\{m_n\}$, чтобы существовала функция $F(t)\in L_p(\varphi)$ такая что

$$\int\limits_0^\infty t^{\gamma_n}F(t)dt=m_n.$$

$\varphi(t)$—берется из класса A: а именно, скажем, что $\varphi(t)\in A$, если для невозрастающей функции $\varphi(t)$ существует такая неубывающая, положительная функция $K(x)$, что $\varphi(t)\geqslant\omega(tx)K(x)$ для всех $x>0$, $t>0$, где

$$\omega(tx)=\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(xt)^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}}.$$

Следует отметить, что для случая, когда

[illegible]

$$\| F \|_{L^\infty} < C \quad \text{на} \quad (0, \infty) \quad \text{и} \quad \lim_{t \to \infty} F(t) = 0,$$

задача решена в работе (¹).

Для решения проблемы моментов в данной работе обобщаются полученные в работе (²) необходимые и достаточные условия представимости функции в виде

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-tx} F(t)\,dt, \quad \text{где} \quad F(t) \in L_p(\varphi)$$

на случай, когда функция e^{-tx} заменена функцией $\omega(tx)$.

Теорема 1. *Для того, чтобы:*

$$f(x) = \int_0^\infty \omega(xt) F(t)\,dt, \quad \textit{где} \quad F(t) \in L_p(\varphi), \quad \textit{а}$$

$$\omega(xt) = \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{(xt)^{-\zeta}\,d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}},$$

необходимо и достаточно, чтобы:

1. $f(x) = o(1)$ *при* $x \to \infty$

2. $\left\| \dfrac{f^{[k+1]}(1/u)(1/u)^{\gamma_k+2}}{\beta_k \prod\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu} \right\|_{L_p(\varphi)} \leqslant M$ *для* $k = 0, 1, 2 \ldots$ $\beta_k = \exp \sum\limits_{1}^{k} \frac{1}{\gamma_\nu}$,

$f^{[k+1]}(x)$*—обобщенные производные k-го порядка:*

$$f^{[0]}(t) = f(t), \quad f^{[1]}(t) = f'(t), \; \ldots, \; f^{[k+1]}(t) = \left(\frac{f^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}} \right)' \quad k = 1, 2 \ldots$$

Достаточность. Предварительно докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Если:*

$f^{[k+1]}(x)\, x^{\gamma_k+1} = O(1)$ $x \to \infty$ и $f(x) = o(1)$ $x \to \infty$ $k = 0, 1, 2 \ldots,$

то имеет место:

$$f^{[k+1]}(x)\, x^{\gamma_k+1} = o(1) \quad x \to \infty.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл:

$$I = \int_x^{x+\delta x} \left[t^{\gamma_k - \gamma_{k-1}} - (x \pm \delta x)^{\gamma_k - \gamma_{k-1}} \right] f^{[k+1]}(t)\,dt \quad \text{для} \quad 0 < \delta < 1$$

Интегрируя по частям, получим:

$$I = -x f^{[k]}(x) + (1\pm\delta)^{\gamma_k-\gamma_{k-1}} \cdot x f^{[k]}(x) + \frac{\gamma_k-\gamma_{k-1}}{x^{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}-1}} \times$$
$$\times \left[f^{[k-1]}(x) - \frac{f^{[k-1]}(x\pm\delta x)}{(1\pm\delta)^{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}-1}}\right].$$

С другой стороны, теорема о среднем дает:

$$I = f^{[k+1]}(x\pm\theta\delta x)\, x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}+1}\left[\frac{(1\pm\delta)^{\gamma_k-\gamma_{k-1}}(\delta\gamma_{k-1}-\delta\gamma_k-1)-1}{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}\right].$$

В результате имеем:

$$\left[f^{[k-1]}(x) - \frac{f^{[k-1]}(x\pm\delta x)}{(1\pm\delta)^{\gamma_{k-1}-\gamma_{k-2}-1}}\right] x^{\gamma_{k-2}+1} + \frac{x^{\gamma_{k-1}+1} f^{[k]}(x)[(1\pm\delta)^{\gamma_k-\gamma_{k-1}}-1]}{\gamma_k-\gamma_{k-1}} = \tag{1}$$
$$= \frac{1}{(\gamma_k-\gamma_{k-1})(\gamma_k-\gamma_{k-1}-1)}\,[(1\pm\delta)^{\gamma_k-\gamma_{k-1}}(\delta\gamma_{k-1}-\delta\gamma_k-1)-1]\, f^{[k-1]}\times$$
$$\times (x\pm\theta\delta x)\, x^{\gamma_k+1}.$$

Для $k=1$ имеем:

$$f(x)-f(x\pm\delta x) - \frac{xf'(x)}{\gamma_1}[1-(1\pm\delta)^{\gamma_1}] = \frac{1}{\gamma_1(\gamma_1+1)}\times$$
$$\times [(1\mp\gamma_1\delta)(1\pm\delta)^{\gamma_1}-1]\, f^{[2]}(x\pm\theta\delta x)\, x^{\gamma_1+1};$$

по условию леммы существует такое M, что:

$$f^{[2]}(x\pm\theta\delta x) < M(1\pm\theta\delta)^{-\gamma_1-1}x^{-\gamma_1-1} \leqslant M(1-\delta)^{-\gamma_1-1}x^{-\gamma_1-1}.$$

Учитывая, что $f(x)-f(x\pm\delta x)=o(1)$ при $x\to\infty$, получим:

$$\frac{M(1-\delta)^{-\gamma_1-1}[(1+\gamma_1\delta)(1-\delta)^{\gamma_1}-1]}{[(1-\delta)^{\gamma_1}-1]\,\gamma_1(\gamma_1+1)} \leqslant \varliminf_{x\to\infty} x f'(x) \leqslant \varlimsup_{x\to\infty} x f'(x) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M(1-\delta)^{-\gamma_1-1}[(1-\gamma_1\delta)(1+\delta)^{\gamma_1}-1]}{[(1+\delta)^{\gamma_1}-1]\,\gamma_1(\gamma_1+1)},$$

так как δ произвольно, имеем:

$$\lim_{x\to\infty} x f'(x) = 0.$$

Лемма доказана для $k=1$. Равенство (1) дает требуемый результат для любого k, если применить метод индукции.

Перейдем к доказательству достаточности условий теоремы. Существование интеграла

$$\int_c^x f^{[k+1]}\left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{u}\right)^{\gamma_k+2} du$$

можно установить, применяя неравенство Гельдера и условие 2:

$$\int_0^x \left| f^{[k+1]}\left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{u}\right)^{\gamma_k+2}\right| du \leqslant \left[\int_0^x \left| f^{[k+1]}\left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{u}\right)^{\gamma_k+2}\right|^p \varphi(u)du \right]^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int_0^x \varphi(t)^{-p'/p} dt \right)^{1/p'} \leqslant \frac{M}{K(y)^{1/p}} \cdot \left[\int_0^x \omega(yt)^{-p'/p} dt \right|^{1/p'}, \quad 1/p+1/p'=1.$$

Интеграл в правой части существует, так как при $t \to 0$ $\omega(yt) \to 1$. Тогда

$$\int_0^x f^{[k+1]}(1/u)^{\gamma_k+2}du = \int_{1/x}^{\infty} t^{\gamma_k} f^{[k+1]}(t)dt, \quad \text{и}$$

$$\int_{1/x}^{s} t^{\gamma_k} f^{[k+1]}(t)dt = s^{\gamma_k-1+1} f^{[k]}(s) - (1/x)^{\gamma_k-1+1} f^{[k]}(1/x) - \gamma_k \int_{1/x}^{s} f^{[k]}(t) t^{\gamma_k-1} dt.$$

Получили, что $s^{\gamma_k-1+1} f^{[k]}(s) = O(1)$ $s \to \infty$
откуда, на основании леммы 1, будем иметь:

$$f^{[k]}(s)\ s^{\gamma_k-1+1} = o(1) \quad s \to \infty. \tag{2}$$

Представим функцию $f(x)$ обобщенной формулой Тейлора (¹) в окрестности точки $u > 0$ с устремлением u к ∞. На основании (2) получим:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} f^{[n+1]}(t) t^{\gamma_n}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu} dt \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(xt)^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right) e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}},$$

делая замену $t = \beta_n / t'$, где $\beta_n = \exp \sum\limits_{\nu=1}^{n} 1/\gamma_\nu$, и введя обозначения

$$\omega_n(tx, \gamma) = \begin{cases} \displaystyle\int_C \frac{(xt)^{-\zeta} d\zeta}{\zeta \prod\limits_{\nu=1}^{n}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)} & t \in \left(0, \frac{\beta_n}{x}\right) \\ 0 & t \in \left(\frac{\beta_n}{x}, \infty\right) \end{cases} \quad \text{и} \quad \alpha_n(t) = \frac{(-1)^{n+1} f^{[n+1]}(\beta_n/t)(\beta_n/t)^{\gamma_n+2}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \cdot \beta_n}$$

получим:

$$f(x) = \int_0^{\infty} \omega_n(xt, \gamma) \alpha_n(t) dt = \int_0^{\infty} \omega(xt, \gamma) \frac{\omega_n(xt, \gamma)}{\omega(xt, \gamma)} \alpha_n(t) dt. \tag{3}$$

Обозначим через $\gamma_n(t) = \varphi(t)^{1/p} \alpha_n(t) \dfrac{\omega_n(xt, \gamma)}{\omega(xt, \gamma)}$.

Очевидно, что $\gamma_n(t) \in L_p$ $(\omega_n(\theta, \gamma) \to \omega(\theta, \gamma)$ равномерно для $\theta \in [0, \infty))$, значит:

$$\int_0^\infty [\gamma_k(t)]^p dt \leqslant M^p \quad k = 1, 2 \ldots$$

следовательно существует последовательность k_l и функция $\gamma(t) = \varphi(t)^{1|p} F(t) \in L_p(\varphi)$, что для любой функции $\beta(t) \in L_q(0, \infty)$, $(1/p + 1/q = 1)$

$$\lim_{l \to \infty} \int_0^\infty \beta(t) \gamma_{k_l}(t) dt = \int_0^\infty \beta(t) \gamma(t) dt. \tag{4}$$

В частности, возьмем $\beta(t) = \varphi(t)^{-1|p} \cdot \omega(xt, \gamma)$, тогда $\beta(t) \in L_q(0, \infty)$ так как

$$\int_0^\infty |\beta(t)|^q dt = \int_0^\infty \varphi(t)^{-q|p} [\omega(xt, \gamma)]^q dt \leqslant K(x)^{-q|p} \int_0^\infty \omega^{-q|p}(xt, \gamma) \omega^q(xt, \gamma) dt =$$

$$= K^{-q|p}(x) \cdot \int_0^\infty \omega(xt, \gamma) dt < \infty.$$

Следовательно из (4)

$$\lim_{l \to \infty} \int_0^\infty \omega_{k_l}(xt, \gamma) a_{k_l}(t) dt = \int_0^\infty \omega(xt, \gamma) F(t) dt, \quad \text{где} \quad F(t) \in L_p(\varphi).$$

Достаточность доказана.

Доказательство необходимости условий теоремы проводится методом Х. Р. Хайнига (^{2}) с некоторыми изменениями, связанными с заменой функции e^{-xt} функцией $\omega(xt, \gamma)$ и ввиду этого не приводится.

Теорема 2. *Для существования решения $F(t)$ проблемы моментов:*

$$\int_0^\infty t^{\gamma_n} F(t) dt = m_n, \quad F(t) \in L_p(\varphi)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция удовлетворяющая условиям:

1. $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{(-1)^k f^{(k)}(x)}{x^{\gamma_k - \gamma_{k-1} - 1}} = \dfrac{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1} (\gamma_k - \gamma_\nu)}{|g'(\gamma_k)|}$, *где* $g(z) = z \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z}{\gamma_\nu}\right) e^{z|\gamma_\nu}$

$k = 1, 2 \ldots$

2. $f(x) = o(1) x \to \infty \quad f(0+) = m_0.$

3. $$\left\| \frac{f^{(k+1)}(1/u)(1/u)^{\gamma_k+2}}{\prod\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_\nu \cdot \beta_k} \right\|_{L_p(\varphi)} \leqslant M \quad k=1,\ 2\ \ldots$$

Достаточность. Пусть существует функция, удовлетворяющая условиям 1, 2, 3. Тогда имеет место (3), то есть:

$$f(x)=\int\limits_0^\infty \omega_n(xt,\ \gamma)\alpha_n(t)dt,$$

откуда

$$f^{(k)}(x)=\int\limits_0^\infty \omega_n^{(k)}(xt,\ \gamma)\alpha_n(t)dt=\prod_{\nu=1}^{k-1}\gamma_\nu\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{x^{-\zeta-\gamma_{k-1}-1}t^{-\zeta}\beta_{k-1}^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{n}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}}\alpha_n(t)dt$$

$$k<n,$$

$$\frac{f^{(k)}(x)(-1)^k}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1}\gamma_\nu}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\int\limits_C \frac{x^{-\zeta-\gamma_k}t^{-\zeta}\beta_{k-1}^{-\zeta}d\zeta}{\prod\limits_{\nu=k}^{n}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu}}}\alpha_n(t)dt=$$

$$=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{\beta_k^{\gamma_k}\prod\limits_{k+1}^{n}\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_\nu}\right)e^{\gamma_k/\gamma_\nu}}\int\limits_0^\infty\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{(tx)^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\nu=k+1}^{n}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu-\gamma_k}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu-\gamma_k}}}t^{\gamma_k}\alpha_n(t)dt.$$

Обозначим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\left(\frac{tx}{\beta_k}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{\nu=k+1}^{n}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu-\gamma_k}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu-\gamma_k}}}=\omega_n^{*}\left(\frac{tx}{\beta_k},\ \gamma-\gamma_k\right),$$

имеем:

$$\frac{(-1)^k f^{(k)}(x)}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{\beta_k^{\gamma_k}\prod\limits_{\nu=k+1}^{n}\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_\nu}\right)e^{\frac{\gamma_k}{\gamma_\nu}}}\int\limits_0^\infty\omega_n^{*}\left(\frac{tx}{\beta_k},\ \gamma_k-\gamma\right)t^{\gamma_k}\alpha_n(t)dt \tag{5}$$

Докажем существование интеграла:

$$\int\limits_0^\infty t^{\gamma_k}\alpha_n(t)dt \qquad \text{для} \quad k\leqslant n. \tag{6}$$

$$J=\int\limits_0^\infty t^{\gamma_k}\alpha_n(t)dt=\int\limits_0^\infty\frac{\beta_n^{\gamma_n+1}f^{(n+1)}(t)t^{\gamma_n+2}}{t^{\gamma_k+2}}dt=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\beta_n^{\gamma_k}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}\int\limits_0^\infty f^{[n+1]}(t)t^{\gamma_n-\gamma_k}dt=\frac{(-1)^{n+1}\beta_n^{\gamma_k}}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu}\cdot\frac{f^{[n]}(t)}{t^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}}\cdot t^{\gamma_n-\gamma_k}\Bigg|_0^\infty-$$

$$-\int\limits_0^\infty\frac{f^{[n]}(t)}{t^{\gamma_n-\gamma_{n-1}-1}}t^{\gamma_n-\gamma_k-1}\,dt,$$

учитывая, что $f^{[n]}(t)t^{\gamma_{n-1}+1}=o(1)$ при $t\to\infty$ (лемма 1) и $f^{[n]}(t)t^{-\gamma_n+\gamma_{n-1}+1}=$ $=0(1)$ (условие 1 теоремы 2) и, продолжая процесс интегрирования по частям, получим:

$$J=\int\limits_0^\infty f^{[k+1]}(t)t^{\gamma_k-\gamma_k}dt=\frac{f^{[k]}(t)}{t^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\Bigg|_0^\infty.$$

Предел правой части существует, ввиду леммы 1 и условия 1 теоремы 2.

Существование интеграла (6) позволяет перейти к пределу при $x\to0+$ в (5), а так как $\lim\limits_{x\to0+}\omega^*(x,\gamma)=1$, получим:

$$\lim_{x\to0+}\frac{(-1)^kf^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{\beta_k^{\gamma_k}\prod\limits_{k+1}^{n}\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_\nu}\right)e^{\gamma_k/\gamma_\nu}}\int\limits_0^\infty t^{\gamma_k}a_n(t)dt.$$

Перейдя к пределу по полученной в теореме 1 подпоследовательности n_i, получим:

$$\lim_{x\to0+}\frac{(-1)^kf^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{\beta_k^{\gamma_k}\prod\limits_{k+1}^{n}\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_\nu}\right)e^{\gamma_k/\gamma_\nu}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty t^{\gamma_k}F(t)dt=\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{k-1}(\gamma_k-\gamma_\nu)}{|g'(\gamma_k)|}\int\limits_0^\infty t^{\gamma_k}F(t)dt,$$

следовательно из условия 2 теоремы получаем, что

$$\int\limits_0^\infty t^{\gamma_k}F(t)dt=m_k\quad k=1,2\ldots$$

Кроме того, имеем,

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\int\limits_0^\infty F(t)dt=m_0.$$

Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть существует функция $F(t)\in L_p(\varphi)$ такая, что

$$\int_0^\infty t^{\gamma_k}F(t)dt=m_k \quad k=0,\ 1,\ 2\ \dots$$

Составим

$$f(x)=\int_0^\infty \omega(xt,\gamma)F(t)dt. \tag{7}$$

Из теоремы 1 следует, что условие 3 для функции $f(x)$ выполнено. Далее, k-кратно продифференцировав (7) и делая некоторые преобразования, получаем:

$$\frac{(-1)^k f^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}=\int_0^\infty A_k(tx)t^{\gamma_k}F(t)dt, \tag{8}$$

где

$$A_k(tx)=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{\beta_k^{\gamma_k}\prod\limits_{\nu=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_\nu}\right)e^{\gamma_k/\gamma_\nu}}\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\left(\frac{tx}{\beta_k}\right)^{-\zeta}d\zeta}{\zeta\prod\limits_{k+1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\gamma_\nu-\gamma_k}\right)e^{-\frac{\zeta}{\gamma_\nu-\gamma_k}}}.$$

Так как

$$0\leqslant A_k(xt)\leqslant\lim_{x\to0+}A_k(tx)=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu}{\beta_k^{\gamma_k}\prod\limits_{k+1}^{\infty}\left(1-\frac{\gamma_k}{\gamma_\nu}\right)e^{\gamma_k/\gamma_\nu}},$$

то в (8) можно перейти к пределу при $x\to0+$. Получим:

$$\lim_{x\to0+}\frac{(-1)^k f^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}=\frac{\prod\limits_{\nu=0}^{k-1}(\gamma_n-\gamma_\nu)}{|g'(\gamma_k)|}m_k.$$

Кроме того, имеем:

$$f(0+)=\int_0^\infty F(t)dt=m_0.$$

Откуда из (7) следует, что

$$f(x)=o(1) \qquad x\to\infty.$$

Теорема доказана.

В заключение приношу благодарность Г. В. Бадаляну и В. М. Едигаряну за постановку задачи и советы при выполнении работы.

Ереванский политехнический институт имени К. Маркса

Ա. Ս. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

Ստիլտյեսի ընդհանրացված մոմենտների խնդրի վերաբերյալ

Դիտարկվում է Ստիլտյեսի մոմենտների խնդրի հետևյալ ընդհանրացումը։ Տրված $0=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_n$ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k}=\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k^2}<\infty$ *իրական թվային հաջորդականության առկայությամբ գտնել պայմաններ* $|m_n|$ *հաջորդականության համար, որպեսզի գոյություն ունենա* $F(t)\in L_p(\varphi)$ *ֆունկցիա, որտեղ* $L_p(\varphi)$*-ն այնպիսի ֆունկցիաների դաս է, որ՝*

$$\left(\int_0^{\infty}|F(t)|^p\varphi(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty.$$

Ցույց է տրվում, որ այդ մոմենտների խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է և բավարար գոյություն ունենա $[0,\infty)$*-ի վրա որոշված* $f(t)$ *անվերջ դիֆերենցելի ֆունկիա, որը բավարարի հետևյալ պայմաններին՝*

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(-1)^k f^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}=\frac{\prod\limits_{\nu=1}^{k-1}(\gamma_k-\gamma_\nu)}{|g'(\gamma_k)|}$$

$$f(x)=o(1)\ x\to\infty\quad f(0+)=m_0$$

$$\left\|\frac{f^{[k+1]}\left(\frac{1}{u}\right)\left(\frac{1}{u}\right)^{\gamma_k+2}}{\prod\limits_{\nu=1}^{k}\gamma_\nu\beta_k}\right\|_{L_p(\varphi)}\leqslant M\quad k=1,\ 2\ \ldots$$

որտեղ՝

$$f^{[1]}(x)=f'(x)\cdots f^{[k+1]}(x)=\left(\frac{f^{[k]}(x)}{x^{\gamma_k-\gamma_{k-1}-1}}\right)' g(z)=z\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{\gamma_\nu}\right)e^{z/\gamma_\nu}.$$

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Г. В. Бадалян.* ИАН СССР сер. мат., т. 31, вып. 3, 491—530 (1967). [2] *H. P. Heinig,* Canadian mathematical bulletin Vol. 10 No. 3 (1967). [3] *D. V. Widder.* The Laplace Transform. Princeton, 1946.