ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVI 1978 2

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

А. Х. Симонян

О вероятности уклонения гауссовского случайного процесса от аппроксимирующей случайной кривой

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 24/XII 1977)

В работе найдена точная асимптотика вероятности уклонения недифференцируемого гауссовского стационарного процесса от аппроксимирующей случайной кривой.

Пусть $\xi(t)$, $t\in(-\infty, +\infty)$, центрированный гауссовский стационарный процесс, траектории которого непрерывны с вероятностью 1, а корреляционная функция удовлетворяет условиям:

$$r(t)=1-|t|^\alpha+g(t),\quad g(t)=o(|t|^\alpha)\ \text{при}\ t\to0; \tag{1}$$

для $t\neq0$ существуют производные $r'(t)$, $r''(t)$, причем

$$r'(t)|t|^{1-\alpha}=O(1),\quad r''(t)|t|^{2-\alpha}=O(1)\quad \text{при}\quad t\to0,\quad 0<\alpha<2. \tag{2}$$

Хорошо известно, что реализации таких процессов недифференцируемы ([1,2]). Примерами процессов подобного типа являются процессы с корреляционными функциями:

$$r_1(t)=\begin{cases}1-|t|^\alpha, & |t|\leq1,\\ 0, & |t|>1\end{cases}\quad r_2(t)=e^{-|t|^\alpha},\ t\in(-\infty, +\infty),$$

если $0<\alpha\leq1$, и $r_3(t)=\frac{1}{2}(|1+t|^\alpha+|1-t|^\alpha-2|t|^\alpha)$, $t\in(-\infty, +\infty)$, если $1<\alpha<2$.

Рассмотрим разбиение промежутка времени $(-\infty, +\infty)$ на отрезки Δ_k длины $h>0$, $\Delta_k=[kh, (k+1)h]$, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ На каждом отрезке Δ_k будем приближать процесс $\xi(t)$ регрессией $\hat{\xi}(t)=$ $=E[\xi(t)/\xi(kh), \xi((k+1)h)]$, $t\in\Delta_k$. Обоснование использования $\hat{\xi}(t)$ дано в ([3]). Без потери общности ограничимся исследованием уклонения $\xi(t)$ от $\hat{\xi}(t)$ на отрезке $t\in[0, h]$, то есть случаем $k=0$, так как по k процесс уклонений образует стационарную последовательность. Исследуем предельное при $h\to0$ поведение процес-

са уклонений $\xi_h(t)=\xi(t)-\hat{\xi}(t)$, $t\in[0, h]$, или, что то же, процесса $\xi_h(t)=\xi(ht)-\hat{\xi}(ht)$, $t\in[0, 1]$.
Пусть u — некоторый уровень, в то время как h — шаг квантования.

Определение. *Изменение уровня u и шага квантования h назовем согласованным, если $h\to 0$, $u\to 0$, а $uh^{-\alpha/2}\to+\infty$, и обозначим*

$$((h, u))\to 0. \tag{3}$$

Основным результатом данной работы является получение асимптотики вероятности уклонения $\mu_h(u)=P\{\max\limits_{t\in[0,1]}\xi_h(t)>u\}$ при $((h, u))\to 0$. Асимптотическое поведение таких вероятностей в случае однородных процессов и полей исследовано Ю. К. Беляевым, В. И. Питербаргом, С. Берманом, Дж. Пикандсом III и другими авторами ([4,5,6]). Рассматриваемый же нами процесс уклонения $\xi_h(t)$ является нестационарным. Для выявления асимптотического выражения вероятности $\mu_h(u)$ мы воспользуемся известной леммой Д. Слепяна ([7]). Эта лемма дает возможность использовать некоторые результаты больших уклонений, полученные для стационарных процессов.

Приведем некоторые необходимые нам известные результаты.

Лемма 1. 1. *Для всех $x>0$*

$$\psi(x)(1-x^{-2})\leqslant 1-\Phi(x)\leqslant\psi(x),$$

где $$\Phi(x)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-v^2/2}\,dv,\ \text{а}\ \psi(x)=(2\pi)^{-1/2}x^{-1}e^{-x^2/2}. \tag{4}$$

2. *Для ξ и η, нормально распределенных со средним 0, дисперсией 1, ковариацией r, справедливы неравенства:*

$$P\{\xi>x,\ \eta>x\}\leqslant(1+r)\psi(x)\left(1-\Phi\left(x\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{1/2}\right)\right), \tag{5}$$

$$P\{\xi<x,\ \eta>x+a\}\leqslant\frac{x(1-r^2)^{1/2}}{r}\,\psi(x)R\left(\frac{ar}{\sqrt{1-r^2}}-x\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{1/2}\right), \tag{6}$$

где

$$R(x)=\int\limits_{x}^{+\infty}(1-\Phi(v))\,dv,\ x,\ a>0;\quad R(x)\leqslant x^{-1}\psi(x). \tag{7}$$

Доказательство соотношения (4) имеется в ([2]), соотношений (5) и (6) в ([6]), а соотношения (7) в ([4]).

Лемма 2 (Пикандса-Питербарга). *Пусть $\eta(t)$ — гауссовский сепарабельный стационарный процесс со средним 0, дисперсией σ^2, для корреляционной функции которого справедливо разложение $\rho(t)=1-C|t|^\alpha+o(|t|^\alpha)$, $t\to 0$, c, $\alpha>0$. Тогда*

$$\lim_{x\to+\infty}(\psi(x/\sigma))^{-1}P\{\max_{t\in[0,\,Tx^{-2/\alpha}]}\eta(t)>x\}=H_\alpha(C^{1/\alpha}\sigma^{1-2/\alpha}T), \tag{8}$$

$$H_\alpha(T)=1+\int\limits_{0}^{+\infty}e^{s}P\{\max_{[0,\,T]}\chi(t)>s\}\,ds<\infty.$$

где $\chi(t)$ — гауссовский процесс, $E\chi(t) = -|t|^\alpha$, $\operatorname{cov}[\chi(t_1), \chi(t_2)] = -|t_1 - t_2|^\alpha + |t_1|^\alpha + |t_2|^\alpha$, причем $0 < H_\alpha = \lim_{T\to\infty} \frac{H_\alpha(T)}{T} < \infty$.

Доказательство леммы 2 дано в ([6,8]).

Лемма 3 (*Д. Слепяна*). *Пусть* $\eta_i(t)$, $i=1, 2$, $E\eta_i(t)=0$, $t\in\Delta$, *два гауссовских процесса*, $E\eta_1^2(t)=E\eta_2^2(t)$, $t\in\Delta$,

$$E\,\eta_1(t_1)\eta_1(t_2) \leqslant E\eta_2(t_1)\eta_2(t_2) \quad \text{для всех } t_1, t_2 \in \Delta, \tag{9}$$

а u — некоторый уровень. Тогда

$$P\{\sup_\Delta \eta_1(t) > u\} \geqslant P\{\sup_\Delta \eta_2(t) > u\}. \tag{10}$$

Доказательство леммы Д. Слепяна приведено в ([7]).

При нахождении асимптотики $\mu_h(u)$ удобно ввести в рассмотрение нормированный процесс $\xi^*(t) = \frac{\xi_h(t)}{\sigma_h(t)}$. Его ковариационной функцией будет функция $r_h^*(t_1, t_2) = \frac{r_h(t_1, t_2)}{\sigma_h(t_1)\,\sigma_h(t_2)}$, а дисперсия равна 1.

Получим неравенства типа (9) для $r_h^*(t_1, t_2)$.

Теорема 1. *Если* $t_1, t_2 \in \Delta = [s, t]$, $0<s<t<1$, *тогда*

$$1-\overline{C}(\Delta)|t_1-t_2|^\alpha \leqslant r_h^*(t_1, t_2) \leqslant 1-\underline{C}(\Delta)|t_1-t_2|^\alpha, \tag{11}$$

где $\overline{C}(\Delta) > \underline{C}(\Delta)$, $\underline{C}(\Delta)\to C_h(v)$, $\overline{C}(\Delta)\to C_h(v)$ *при* $s\to v$, $t\to v$, $v\in(0, 1)$, *причем*

$$\overline{C}(\Delta) = \max_{t_1 t_2\in\Delta} E_h(t_1, t_2), \quad \underline{C}(\Delta) = \min_{t_1 t_2\in\Delta} E_h(t_1, t_2), \tag{12}$$

$$C_h(v) = \left\{[f_h(v)+f_h(1-v)]/\sigma_h^*\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)\right\}^2$$

$$E_h(t_1, t_2) = \left\{\frac{\left[f_h\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)+f_h\left(1-\frac{t_1+t_2}{2}\right)\right]}{\sigma_h^*\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)}\right\}^2 + D_h\left(\frac{t_1-t_2}{2}, \frac{t_1+t_2}{2}\right), \tag{13}$$

$$\sigma_h^{*2}(t) = \sigma_h^2(t)/h^\alpha.$$

В частности

$$\lim_{h\to 0} C_h\left(\frac{1}{2}\right) = C_\alpha = (2^{1-\alpha} - 2^{-1})^{-1}.$$

Функция D_h означает остаточный член в (12), *а*

$$f_h(t) = |r(ht) - r(h)r(h(1-t))| \,/\, |1 - r^2(h)|.$$

Доказательство теоремы 1 основано на представлении процесса $\xi_h(t)$ посредством функций $f_h(t)$ и $g_h(t)$:

$$\xi_h(t) = \xi(ht)g_h(t) + [\xi(ht) - \xi(0)]\,f_h(t) + [\xi(ht) - \xi(h)]\,f_h(1-t),\ t\in[0,1]. \tag{14}$$

где $g_h(t)=[1-f_h(t)-f_h(1-t)]/h^a$. Из представления (14) непосредственным подсчетом можно получить, что и $r^*(t_1, t_2)$ выражается через $f_h(t)$ и $g_h(t)$, а поэтому, воспользовавшись условиями (1) и (2), можно показать, что

$$r_h^*(t+s,\ t-s)=1-2|s|^a\left\{\left[\frac{f_h(t)+f_h(1-t)}{\sigma_h^2(t)}\right]^2+D_h(s,t)\right\}, \qquad (15)$$

где $D_h(s,t)\to 0$ равномерно при $h, s\to 0$. Отсюда, замечая, что любые t_1, t_2 представимы в виде $\frac{t_1+t_2}{2}+\frac{t_1-t_2}{2}$, $\frac{t_1+t_2}{2}-\frac{t_1-t_2}{2}$, непосредственно получаем утверждение теоремы 1.

В дальнейшем нам необходима будет также следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $0<x<1/2$, *то*

$$\sigma_h^2(1/2+x)/h^a=2^{-1}[2^{2-a}-1]+f(h)-\{a2^{-a+3}[1-a(1-2^{-a+1})]+l(h,x)\}x^2, \qquad (16)$$

где $f(h)\to 0$ *при* $h\to 0$, $l(h,x)\to l(h,0)$ *при* $x\to 0$, $l(h,0)\to 0$ при $h\to 0$. Доказательство теоремы 2 проводится по тому же плану, что и теоремы 1, с использованием выражения (12) при $t_1=t_2=1/2+x$.

Замечание. Следует заметить, что при доказательстве обоих вышеприведенных теорем существенно наличие условий (2).

Согласно теореме 2 введем функции $a(h)$ и $b(h,x)$ такие, что

$$\sigma_h^2(1/2+x)=a^2(h)-b(h,x)x^2, \qquad (17)$$

причем

$$\frac{a^2(h)}{h^a}\to[2^{1-a}-2^{-1}]=a^2(0), \qquad \frac{b(h,x)}{h^a}\to a2^{-a+3}[1-a(1-2^{1-a})]=b(0,0)>0$$

при $h\to 0$ и $x\to 0$.

Из (17) следует, что

$$u/\sigma_h\left(\frac{1}{2}+x\right)=\frac{u}{a(h)}+\frac{u}{a(h)}F(h,x)x^2, \qquad (18)$$

где $F(h,x)\to\frac{b(0,0)}{a^2(0)}$ при $((h,u))\to 0$, $x\to 0$.

Учитывая то, что по определению процесса $\xi^*(t)$ имеем $\mu_h(u)=$ $=P$ {есть выход $\xi_h^*(t)$ за уровень $u/\sigma_h(t)$, $t\in[0,1]$}, найдем такой интервал времени $\Delta(h)=\left[\frac{1}{2}-\frac{\delta(h)}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{\delta(h)}{2}\right]$, что $P\{\max\limits_{t\in[0,1]}\xi_h(t)>u\}\sim$ $\sim P\{\max\limits_{\Delta(h)}\xi_h(t)>u\}$ при $((h,u))\to 0$.

Теорема 3. *Пусть* $\delta(h)=[s(u^*)\sqrt{\ln u^*}]/u^*$, *где* $u^*=uh^{-a/2}$, *а* $s(u^*)\to\infty$ *сколь угодно медленно при* $u^*\to\infty$. *Тогда*

$$\lim_{((h,u))\to 0}\frac{P\{\max\limits_{[0,1]}\xi_h(t)>u\}}{P\{\max\limits_{\Delta(h)}\xi_h(t)>u\}}=1.$$

Доказательство. Возьмем некоторое v, $0<v<1/2$, и разбиение отрезка $[0, 1]$ следующим образом: $[0, 1]=\Delta(h)\cup\Delta_v^-\cup\Delta_v^+\cup[0,v]\cup$ $\cup[1-v, 1]$, где $\Delta_v^-=\left[v, \frac{1}{2}-\frac{\delta(h)}{2}\right]$, а $\Delta_v^+=\left[\frac{1}{2}+\frac{\delta(h)}{2}, 1-v\right]$.

Покажем, что вероятности превышения уровня u на каждом из интервалов Δ_v^-, Δ_v^+, $[0, v]$, $[1-v,1]$ асимптотически бесконечно малы по сравнению с вероятностью превышения уровня u на $\Delta(h)$, откуда непосредственно следует утверждение теоремы. Сравним, для примера, эти вероятности на $\Delta(h)$ и Δ_v^-. Из того, что $P\{\max\limits_{\Delta(h)}\xi_h(t)>u\}\geqslant\psi\left(\frac{u}{\sigma_h(1/2)}\right)$ на основании теоремы 1 и лемм 3, 2 получаем

$$\frac{P\{\max\limits_{\Delta_v^-}\xi_h(t)>u\}}{P\{\max\limits_{\Delta(h)}\xi_h(t)>u\}}\leqslant\psi^{-1}\left(\frac{u}{\sigma_h\left(\frac{1}{2}\right)}\right)\psi\left(\frac{u}{\sigma_h\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta(h)}{2}\right)}\right)\left(\frac{u}{h^{\alpha/2}}\right)^{2/\alpha}\times$$

$$\times\frac{H_\alpha}{\left[\sigma_h\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta(h)}{2}\right)/h^{\alpha/2}\right]^{2/\alpha}}. \tag{19}$$

Выражение в показателе экспоненты в (19) будет стремиться к $-\infty$ по теореме 2, если $\frac{u^2}{2\sigma_h^2\left(\frac{1}{2}\right)}-\frac{u^2}{2\sigma_h^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\delta(h)}{2}\right)}\to-\infty$ быстрее, чем остальные члены показателя порядка $-L\ln u^*$, а это означает, что должно выполняться равенство $u^{*2}\delta^2(h)=s^2(u^*)\ln u^*$, где $s(u^*)\to\infty$, то есть $\delta(h)=\frac{s(u^*)\sqrt{\ln u^*}}{u^*}$.

Сравнение $\Delta(h)$ с остальными интервалами проводится по такому же плану.

Теорема 4. *Если выполнены условия* (1) *и* (2), *то*

$$\lim_{((h,u))\to 0}\frac{P\{\max\limits_{\Delta(h)}\xi_h(t)>u\}}{\sqrt{2\pi}b_\alpha^{-1/2}H_\alpha a_\alpha^{1-2/\alpha}u'^{2/\alpha-1}\psi(u')}=1, \tag{20}$$

где $a_\alpha=\sqrt{2^{1-\alpha}-2^{-1}}$, $b_\alpha=\alpha 2^{-\alpha+3}[1-\alpha(1-2^{1-\alpha})]$, $u'=u^*/a_\alpha$.

Доказательство. Пусть $\Delta_k(h)=[1/2+k\delta, 1/2+(k+1)\delta]$, где $\delta=T/u^{*2/\alpha}$, $u^*=u/h^{\alpha/2}$, $T>0$, а $k=\left[-\frac{\delta(h)}{2\delta}\right], \left[\frac{\delta(h)}{2\delta}\right]$. Введем события $A_k=\{\max\limits_{\Delta_k(h)}\xi_h(s)>u\}$. Тогда имеет место очевидное неравенство

$$\sum_k P(A_k)-\sum_{k<l}\sum P(A_k\cap A_l)\leqslant P\{\max_{\Delta(h)}\xi_h(t)>u\}\leqslant\sum_k P(A_k). \tag{21}$$

Исследуем асимптотику $\sum\limits_k P(A_k)$. Рассмотрим $\overline{C}(\Delta_k(h))$, $\overline{C}(\Delta_k(h))\to$ $\to C=C(1/2)$, $((h,u))\to 0$, и процесс $\bar{\xi}_k^*(t)$ с корреляционной функцией

$\bar r_h^{(h)}(t) = 1-\bar C(\Delta_k(h))|t|^\alpha + O(|t|^2)$, $t\to 0$, такой что $\bar r_h^{(h)}(t_1-t_2) \leqslant r_h^*(t_1, t_2)$ при $(t_1, t_2)\in\Delta_k(h)\times\Delta_k(h)$ и $C=(2^{1-\alpha}-2^{-1})^{-1}$. Тогда, используя леммы 3, 2 и соотношение (18) можно показать, что для произвольного $\varepsilon>0$ справедливо следующее неравенство:

$$\sum_k P(A_k)\leqslant(1+\varepsilon)TH_\alpha C^{1/\alpha}\sum_k\left(a_\alpha\sqrt{1-\frac{b_\alpha}{2a_\alpha^2}\left(\frac{kT}{u^{*2/\alpha}}\right)^2}\right)^{-2/\alpha}\times$$

$$\times\psi\left(\frac{u^*}{a_\alpha}\left(1+\frac{b_\alpha}{2a_\alpha^2}\left(\frac{kT}{u^{*2/\alpha}}\right)^2\right)\right),$$

если только $((h, u))$ достаточно мало. Правую часть этого неравенства можно свести к интегральной сумме, если рассмотреть сгущающуюся последовательность $y_k=u^{*1-2/\alpha}\sqrt{\frac{b_\alpha}{2}}\frac{T}{a_\alpha^2}k$. Получим согласно соотношению

$$\psi\left(\frac{u^*}{a_\alpha}\left(1+\frac{b_\alpha}{2a_\alpha^2}\left(\frac{kT}{u^{*2/\alpha}}\right)^2\right)\right)\sim\psi\left(\frac{u^*}{a_\alpha}\right)e^{-y_k^2},\quad u^*\to\infty,\quad \text{что}$$

$$\sum_k P(A_k)\leqslant(1+2\varepsilon)C^{1/\alpha}H_\alpha b_\alpha^{-1/2}a_\alpha^{2-2/\alpha}\sqrt{2}\,\psi(u^*/a_\alpha)u^{*2/\alpha-1}\sum_k e^{-y_k^2}(y_{k+1}-y_k)$$

или

$$\sum_k P(A_k)\leqslant(1+3\varepsilon)C^{1/\alpha}H_\alpha b_\alpha^{-1/2}a_\alpha^{2-2/\alpha}\sqrt{2}\,\psi(u^*/a_\alpha)u^{*2/\alpha-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\sqrt{\pi},$$

если только $((h, u))$ достаточно мало. Взяв $((h, u))\to 0$, в силу произвольности ε получаем, что

$$\overline{\lim_{((h,u))\to 0}}\left(\sum_k P(A_k)\right)/\sqrt{2\pi}\,C^{1/\alpha}H_\alpha b_\alpha^{-1/2}a_\alpha^{2-2/\alpha}u^{*2/\alpha-1}\psi(u^*/a_\alpha)\leqslant 1.$$

Аналогично можно показать, что имеет место соотношение

$$\underline{\lim_{((h,u))\to 0}}\left(\sum_k P(A_k)\right)/\sqrt{2\pi}\,C^{1/\alpha}H_\alpha b_\alpha^{-1/2}a_\alpha^{2-2/\alpha}u^{*2/\alpha-1}\psi(u^*/a_\alpha)\geqslant 1.$$

Таким образом

$$\lim_{((h,u))\to 0}\left(\sum_k P(A_k)\right)/\sqrt{2\pi}\,C^{1/\alpha}H_\alpha b_\alpha^{-1/2}a_\alpha^{2-2/\alpha}u^{*2/\alpha-1}\psi(u^*/a_\alpha)=1. \qquad (22)$$

Что же касается $\sum_k\sum_l P(A_k\cap A_l)$, то методом, основанным на применении неравенств (5) и (6) (смотри ([8])), модифицируя его для нестационарного случая, получается, что двойная сумма является бесконечно малым более высокого порядка, чем $\sum_k P(A_k)$, при $((h, u))\to 0$. Отсюда, с учетом соотношений (21) и (22) следует утверждение теоремы 4.

Итак на основе теорем 3 и 4 можно сформулировать окончательный результат.

Теорема 5. *В предположениях* (1) *и* (2) *справедливо предельное соотношение:*

$$\lim_{|(h,\, a)| \to 0} \frac{P\{\max\limits_{[0,\, 1]} \xi_h(t) > u\}}{K_\alpha u'^{2/\alpha - 1} \psi(u')} = 1,$$

где $K_\alpha = \sqrt{2\pi} H_\alpha a_\alpha^{-2/\alpha+1} b_\alpha^{-1/2}$.

В заключение выражаю искреннюю признательность Ю. К. Беляеву за постановку задачи и ценные указания.

Ереванский государственный университет

Ա. Խ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Գաուսյան պատահական պրոցեսի, նրան մոտարկող պատահական կորից, շեղման հավանականության մասին

Դիցուք $\xi(t)$*-ն գաուսյան, ստացիոնար, ոչ դիֆերենցելի պատահական պրոցես է, որի իրագործումները 1 հավանականությամբ անընդհատ են։ Որոշ պայմաններում հետազոտվում է այդ պրոցեսի, նրան մոտարկող ռեգրեսիայի կորից, շեղման հավանականության ասիմպտոտիկ տեսքը, երբ մոտարկման քայլը՝ h-ը, ձգտում է զրոյի որոշ իմաստով համաձայնեցված եղանակով։*

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Y. K. Belayev*, Proc. of IV Berkley Symposium on Math. Statistics and Probability. California press, 1961. [2] *Г. Крамер, М. Р. Лидбеттер*, Стационарные случайные процессы. „Мир“, 1969. [3] *Ю. К. Беляев, А. Х. Симонян, В. А. Красавкина*. Известия АН СССР, „Тех. киб.“, №4, 139—147, 1976. [4] *Ю. К. Беляев, В. И. Питербарг*. Сб. ст. Выбросы случайных полей, изд. МГУ, вып. 29, 62—79. [5] *S. Berman*, Ann. of Prob., Vol. 2, №6, 999—1026 (1974). [6] *J. Pickands, III* Trans. Amer. Math. Soc., 14, 51—73, (1969). [7] *D. Slepian*, Bell Syst. Techn. J., 41, 2 463—501 (1962). [8] *В. И. Питербарг*, Вест. МГУ (мат., мех.), вып. 5, 25—30 1972.