ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVI 1978 2

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Б. С. Нахапетян

Центральная предельная теорема для одного класса функционалов от случайного поля

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 19/XII 1977)

Пусть ξ_t, $t \in Z^\nu$, $\nu \geq 1$—стационарное случайное поле со значениями в некотором борелевском пространстве (X, σ, μ), $0<\mu(X)<\infty$. Для любого $J \subset Z^\nu$ пусть $|J|$—число точек в J и (X_J, σ_J, μ_J) произведение $|J|$ экземпляров пространства (X, σ, μ). Мы скажем, что случайное поле ξ_t, $t \in Z^\nu$ удовлетворяет критерию равномерного сильного перемешивания (критерию р. с. п.), если существует функция $\varphi_I(d)$, $d \in R^1$, $I \subset Z^\nu$, $|I|<\infty$ такая, что

1. $\varphi_I(d) \to 0$ при $d \to \infty$ и фиксированном I

2. $\sup\limits_{A \in \sigma_I,\, B \in \sigma_V,\, P_V(B)>0} |P_{I/V}(A/B)-P_I(A)| < \varphi_I(d(I, V))$*

Здесь I, $V \subset Z^\nu$, $|I|$, $|V|<\infty$, $I \wedge V=\varnothing$, P_I, $I \subset Z^\nu$, $|I|<\infty$—конечномерные распределения случайного поля ξ_t, $t \in Z^\nu$ и $P_{I/V}(A/B)$—условная вероятность события $A \in \sigma_I$ при условии $B \in \sigma_V$. Далее символами M и D будем обозначать математическое ожидание и дисперсию некоторой случайной величины, соответственно, а через $I_{\bar{n}} \subset Z^\nu$, $\bar{n}=(n_1, \ldots, n_\nu) \in Z^\nu$, $n_i \in Z^1$, $i \in \bar{\nu}$, $\bar{\nu}=(1, 2, \ldots, \nu)$ обозначим прямоугольник с центром в начале координат и длинами сторон $2n_i$, $i \in \bar{\nu}$. Мы будем писать $\bar{n}=(n_1, \ldots, n_\nu) \to \infty$, если $\min\limits_{i \in \bar{\nu}} |n_i| \to \infty$, $n_i/n_j|<C$, i, $j \in \bar{\nu}$, $0<C<\infty$. Рассмотрим пространство $L=\bigcup\limits_{J \in H(Z^\nu)} (X_J, \sigma_J, \mu_J)$ $H(Z^\nu)=\{J : J \subset Z^\nu |J|<\infty\}$. Пусть $\Phi(x)$, $x \in L$—некоторый измеримый функционал („потенциал") и для произвольного конечного $I \subset Z^\nu$ положим $\hat{\Phi}_I(x)=\sum\limits_{J \subset I} \Phi(x_J)$. Здесь и далее для любого $x=(x_t, t \in I)$ через x_J, $J \subset I$ обозначается вектор $(x_t, t \in J)$. Основной результат работы представляет следующая

---

* $d(I, V)$—расстояние между множествами I и V.

Теорема 1

а) *Пусть* ξ_t, $t\in Z^\nu$ *удовлетворяет критерию р. с. п., причем* $\varphi_l(d)\leq |l|\varphi(d)$, $\sum\limits_{s\in Z^\nu\setminus\{0\}} \varphi^{1/2}(\|s\|)<\infty$, $\|s\|=\max\limits_{i\in\overline{\nu}}|s_i|$.

б) $\sum\limits_{J:0\in J\in H(Z^\nu)} (M\Phi^2(\xi_t, t\in J))^{1/2}<\infty$.

в) *Для любого конечного прямоугольника* $I\subset Z^\nu$

$$D\hat{\Phi}_I(\xi_t, t\in I)\geq C|I|,\ 0<C<\infty.$$

Тогда для любого $\alpha\in R^1$

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\frac{\hat{\Phi}_{I_n}(\xi_t,t\in I_n)-M\hat{\Phi}_{I_n}(\xi_t,\ t\in I_n)}{\sqrt{D\hat{\Phi}_{I_n}(\xi_t,\ t\in I_n)}}<\alpha\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\alpha} e^{-t^2/2}dt.$$

Далее, если для некоторого функционала Φ выполнено утверждение теоремы 1, мы будем говорить, что для функционала Φ справедлива центральная предельная теорема (ц. п. т.).

Заметим, что для частного случая точечных потенциалов (т. е. таких потенциалов Φ, что при всех $I\subset Z^\nu$, таких что $1<|I|<\infty$, $\Phi(x)=0$ для любого $x\in X_I$) данный результат содержится в ([1]), а для случая точечных потенциалов и $\nu=1$ по существу совпадает с известной теоремой Ибрагимова ([8]). Отметим также, что теорема 1 нетривиальна уже для случая последовательности независимых случайных величин. Функционал $\hat{\Phi}_I$ интерпретируется в статистической физике, как потенциальная энергия взаимодействия частиц в „сосуде" I. Такими функционалами определяются гиббсовские случайные поля ([3]). Рассмотрим следующие классы потенциалов

$$N_\mu=\left\{\Phi: \frac{(\mu(X)e^{|\Phi|})^2}{1+\mu(X)e^{-2|\Phi|}}\ \|\Phi\|<1\right\},$$

$$\|\Phi\|=\sum_{J:0\in J\in H(Z^\nu)}|J|\sup_{x\in X_J}|\Phi(x)|<\infty.$$

а также класс вакуумных потенциалов (т. е. потенциалов Φ таких, что существует элемент $0\in X$ такой, что $\Phi(x)=0$ при любом $x\in X_I$, $I\in H(Z^\nu)$ у которого $x_t=0$ хотя бы при одном $t\in I$

$$N_\mu^0=\{\Phi: C^{(1)}_{\Phi,\mu}(C^{(2)}_{\Phi,\mu}+1)<1\},$$

$$C^{(1)}_{\Phi,\mu}=e^{|\Phi|}\mu^*(X^*)(1+e^{|\Phi|}\mu^*(X^*))^{-1},$$

$$C^{(2)}_{\Phi,\mu}=2(1+2e^{|\Phi|}\mu^*(X^*))(\exp|e^{|\Phi|}-1|-1),$$

$$\|\Phi\|=\sum_{J:0\in J\in H(Z^\nu)}\sup_{x\in X_J}|\Phi(x)|<\infty.$$

Здесь $X^* = X \setminus \{0\}$, $\mathfrak{I}^* = \{A \cap X^* : A \in \mathfrak{I}\}$ и μ^* сужение меры μ на X^*. Известно ([4,5]), что гиббсовские случайные поля, соответствующие потенциалам из этих классов, удовлетворяют условию р. с. п., причем $\varphi_l(d) \leq |I|\varphi(d)$, а $\varphi(d)$ убывает экспоненциально при финитном потенциале и как $\beta(d)/d^{\gamma}$, $\gamma>0$ $\beta(d)\to 0$, $d\to\infty$ если

$$\sum_{J:0\in J\in H(Z^\nu)} |J|\,(D(J))^{\gamma} \sup_{x\in X_J} |\Phi(x)|<\infty,\ \Phi\in N_\mu$$

$$\sum_{J:0\in J\in H(Z^\nu)} (D(J))^{\gamma} \sup_{x\in X_J} |\Phi(x)|<\infty,\ \Phi\in N_\mu^0$$

$D(J)$—диаметр множества J. Далее назовем потенциал вырожденным, если $\sum_{J\subset I} \Phi(x_J)=C_I$ при любом $I\in H(Z^\nu)$. Отметим, что среди вакуумных потенциалов нет вырожденных, кроме тождественно равного нулю. Тождественно равные нулю потенциалы далее исключаются из рассмотрения. Как следует из результатов работы ([4]) для невырожденных потенциалов справедливо условие в) теоремы 1. Теперь мы можем в качестве следствия предыдущих утверждений сформулировать следующие теоремы.

Теорема 2. *Пусть U, Φ потенциалы такие, что*

1) $U\in N_\mu$, $\sum_{J:0\in J\in H(Z^\nu)} (D(J))^{2\nu+\varepsilon}|J| \sup_{x\in X_J} |U(x)|<\infty$, $\varepsilon>0$

2) *Φ—невырожденный потенциал и*

$$\sum_{J:0\in J\in H(Z^\nu)} (M\Phi^2(\xi_t,\ t\in J))^{1/2}<\infty.$$

Здесь ξ_t, $t\in Z^\nu$ гиббсовское случайное поле, соответствующее потенциалу U. Тогда для потенциала Φ верна ц. п. т.

Теорема 3. *Пусть U, Φ потенциалы такие, что*

1. $U\in N_\mu^0$, $\sum_{J:0\in J\in H(Z^\nu)} (D(J))^{2\nu+\varepsilon} \sup_{x\in X_J} |U(x)|<\infty$, $\varepsilon>0$

2. $\sum_{J:0\in J\in H(Z^\nu)} (M\Phi^2(\xi_t,\ t\in J))^{1/2}<\infty$, *$\xi_t$, $t\in Z^\nu$ гиббсовское случайное поле, соответствующее потенциалу U.*

Тогда для потенциала Φ справедлива ц. п. т.

Далее в качестве еще одного непосредственного применения теоремы 1 приведем теорему об асимптотическом поведении логарифма отношения правдоподобия для гиббсовских случайных полей в конечном сосуде ([3])

Теорема 4. *Пусть*

а) *ξ_t, $t\in Z^\nu$ гиббсовское случайное поле, отвечающее потенциалу U такому, что либо*

$$U\in N_\mu \ \text{и}\ \sum_{J:0\in J\in H(Z^\nu)} (D(J))^{2\nu+\varepsilon}|J| \sup_{x\in X_J} |U(x)|<\infty,\ \varepsilon>0$$

либо

$$U\in N_\mu^0 \ \text{и}\ \sum_{J:0\in J\in H(Z^\nu)} (D(J))^{2\nu+\varepsilon} \sup_{x\in X_J} |U(x)|<\infty,\ \varepsilon>0$$

б) $(\Gamma_{\Phi,V})_I$, $I \in H(Z^{\cdot})$ *гиббсовское случайное поле в конечном сосуде* V, *отвечающее потенциалу* Φ *такому, что*

$$\sum_{J:0 \in J \in H(Z^{\cdot})} (M(\Phi_J(\xi_t,\ t \in J))^2)^{1/2} < \infty$$

и $(\Gamma_{U,V})_I$, $I \in H(Z^{\cdot})$ *гиббсовское случайное поле в конечном сосуде* V, *отвечающее потенциалу* U.

в) *потенциал* $U + \Phi$ — *невырожденный.*

Тогда для функционала $L_I = \log \dfrac{(\Gamma_{\Phi,V})_I}{(\Gamma_{U,V})_I}$, $I \in H(Z^{\cdot})$ *справедлива ц. п. т.*

Более интересный и более сложный вопрос об асимптотическом поведении L_I, $I \in H(Z^{\cdot})$ для гиббсовских случайных полей также можно получить с использованием теоремы 1. Но данный вопрос требует дополнительных построений и будет темой отдельной публикации.

Институт математики
Академии наук Армянской ССР

Բ. Ս. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

Կենտրոնական սահմանային թեորեմ պատահական դաշտի վրա ֆունկցիոնալների մի դասի համար

Հոդվածում բերվում են բավարար պայմաններ, որպեսզի պատահական դաշտի վրա ֆունկցիոնալների մի դասի համար տեղի ունենա կենտրոնական սահմանային թեորեմը։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են Գիբբսի պատահական դաշտերի համար կլասիկ վիճակագրական ֆիզիկայի ցանցային սիստեմի պոտենցիալ էներգիայի ասիմպտոտիկ նորմալությունն ապացուցելու համար, ինչպես նաև Գիբբսի պատահական դաշտերի ճշմարտանմանության հարաբերության ասիմպտոտիկ նորմալության ապացույցի համար։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Б. С. Нахапетян*, Сб. ст. Многокомпонентные случайные системы, изд. «Наука», М., 1978. [2] *И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник*, «Независимые и стационарно связанные величины», изд. «Наука», М., 1965. [3] *Р. Л. Добрушин*, Функц. анализ и его прилож. 4.31 (1968). [4] *Р. Л. Добрушин, Б. С. Нахапетян*, «Теор. мат. физ.» 20, 2, 223 (1974). [5] Б. С. *Нахапетян*, «Известия АН Арм. ССР», сер. «Математика», 3, 41 (1975).