ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVI 1978 2

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

А. Ю. Шахвердян

Гиперболическая емкость и убывание мероморфных в круге функций

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 16/XI 1977)

Введем необходимые обозначения и определения. Если f мероморфна в единичном круге D комплексной плоскости (z), то как обычно $T_f(r)$ есть характеристическая функция Р. Неванлинны:

$$T_f(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\varphi})|d\varphi+\int_0^r\frac{n(t)}{t}dt,$$

где $\overset{+}{\log} x=\max(0,\log x)$, $n(t)$—число полюсов f с учетом их кратностей в круге $|z|<t$. В дальнейшем мы используем понятие гиперболической емкости множеств $e\subset D$, которую обозначаем $\operatorname{caph}(e)$, введенное М. Цудзи ([1]). К этому понятию можно прийти, если рассматривать потенциалы, порожденные распределениями μ конечной положительной массы на e с ядром $\log|\xi,z|^{-1}$, $(\xi, z\in D)$:

$$\int_e\log\frac{1}{|\xi,z|}\,d\mu(\xi),$$

где $|\xi,z|=|\xi-z|/|1-\bar{\xi}z|$. Отметим ([1]), что $0\leqslant\operatorname{caph}(e)<1$ и $\operatorname{caph}(e)=0$, тогда и только тогда, когда логарифмическая емкость e есть нуль. Величина $d(\xi,z)$ есть гиперболическое расстояние между $\xi,z\in D$:

$$d(\xi,z)=\frac{1}{2}\log\frac{1+|\xi,z|}{1-|\xi,z|},$$

$\operatorname{dh}(e)=\sup\{d(\xi,z):\xi,z\in e\}$ есть гиперболический диаметр множества e и если e является простой жордановой дугой, то $l(e)$ означает гиперболическую длину e.

Сформулируем задачу. Рассматриваем совокупность E множеств $e_n\subset D$, $E=\langle e_n\rangle_1^\infty$, удовлетворяющую требованиям:

$$\text{A.}\qquad \operatorname{caph}(e_n)>0,\quad \operatorname{dh}(e_n)=O(1),\ \inf_{z\in e_n}|z|\to 1\quad (n\geq 1,\quad n\to\infty).$$

Нас интересует вопрос экстремальной скорости убывания мероморфных в D функций f с заданным ростом характеристики $T_f(r)$ вдоль E, точнее убывание величин

$$\| f \|_{e_n}=\sup\{|f(z)|: z\in e_n\}.$$

Хорошо известно, что вопросы такого характера, когда заключение о тождественности нулю мероморфной функции делается только лишь из предположения о сильном ее убывании вдоль подмножества D, сгущающегося к единичной окружности, впервые были поставлены и систематически изучались А. Л. Шагиняном [2,3]. В настоящей работе в качестве основной величины, контролирующей асимптотический рост на E нетождественной функции, выступает гиперболическая емкость множеств e_n.

При доказательстве нижеследующих теорем мы используем метод гармонической меры Р. Неванлинны, метод М. Хейнса гиперболических полиномов П. Л. Чебышева [1,4] и одну оценку, связанную с характеристической функцией, полученную Д. Рунгом [5].

Теорема 1. *Пусть* $E=\langle e_n\rangle_1^\infty$ *удовлетворяет* A и f *мероморфна в* D. *Если для некоторого* θ, $0<\theta<1$

$$(^*)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log^+\|f\|_{e_n}^{-1}}{|\log\operatorname{caph}(e_n)|}\cdot\frac{1-r_n}{T_f(r_n+\theta(1-r)_n)}=\infty,$$

где $r_n\geq\sup_{z\in e_n}|z|$, *то* $f\equiv 0$

Заметим, что если для $n\geq 1$ e_n есть простая жордановая дуга, то из (*), теорема 5, вытекает неравенство

$$kl^2(e_n)\leq\operatorname{caph}(e_n),\quad n\geq 1$$

где $k>0$—постоянная, не зависящая от n и, таким образом в (*) $\operatorname{caph}(e_n)$ можно заменить более простой величиной $l(e_n)$. В этом случае теорему 1 можно рассматривать как предложение типа леммы Кёбе для мероморфных функций.

Пусть $\Phi_\rho(0\leq\rho<\infty)$ означает класс мероморфных в D функций порядка $\leq\rho$. Наложим на E дополнительное ограничение:

$$\text{B.}\qquad d(e_n,e_m)\geq d_0>0,\ n\neq m,\ n,m\geq 1$$

и везде дальше будем предполагать, что $\xi_n\in e_n$ $(n\geq 1)$ есть произвольные фиксированные числа.

Теорема 2. *Пусть* $E=\langle e_n\rangle_1^\infty$ *удовлетворяет* A, B. *Если* $f\in\Phi_\rho$, $f\not\equiv 0$ *и для некоторого* $\varepsilon>0$

$$(^{**})\qquad \lim_{n\to\infty}(1-|\xi_n|)^{1+\rho+\varepsilon}\log\|f\|_{e_n}=-\infty,$$

то для любого $\delta>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \| f \|_{e_n}}{\log \mathrm{caph}(e_n)} (1-|\xi_n|)^{1+\rho+\varepsilon} < \infty.$$

Скажем, что $E=\langle e_n \rangle_1^{\infty}$ обладает свойством C_ρ, если существует нетождественная функция $f \in \Phi_\rho$, для которой выполнено (**).

Теорема 3. *Пусть для $E=\langle e_n \rangle_1^{\infty}$ выполнены A, B. Для того, чтобы E обладало свойством C_ρ необходимо, чтобы одновременно*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|\xi_n|)^{1+\rho+\varepsilon} < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\log \mathrm{caph}\,(e_n)|^{-1} < \infty$$

для всех $\varepsilon>0$. Если для каждого $n \geqslant 1$ e_n есть либо прямолинейный отрезок либо круг и первый из рядов сходится, то из неравенств

$$0 < \mathrm{dh}(e_n) \leqslant \exp\{-\mathrm{const}\,(1-|\xi_n|)^{(1+\rho+\varepsilon_0)}\} \qquad (\mathrm{const}>0)$$

для всех $n \geqslant 1$ и некоторого $\varepsilon_0>0$, вытекает что E обладает свойством C_ρ.

Теорема 4. *Пусть $E=\langle e_n \rangle_1^{\infty}$ удовлетворяет A, B, C_ρ. Тогда для каждого $f \in \Phi_\rho$, $f \not\equiv 0$ и любого $\varepsilon>0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{+} \| f \|_{e_n}^{-1}}{|\log \mathrm{caph}(e_e)|} (1-|\xi_n|)^{1+\rho+\varepsilon} < \infty.$$

То есть для некоторого $f \in \Phi_\rho$ и $\varepsilon>0$ этот ряд расходится в том и только том случае, когда $f=0$.

Отметим, что так как для нормальной мероморфной функции f $T_f(r)=0(\log 1/1-r)$, то класс нормальных функций содержится в Φ_0. Следовательно, теоремы 2,4 и 1-ая часть теоремы 3 (в формулировках которых положено $\rho=0$) справедливы также в классе нормальных мероморфных в D функций.

Для функций класса N (ограниченного вида) Р. Неванлинны, соответствующие теоремы имеют более простую формулировку. Скажем, что $E=\langle e_n \rangle_1^{\infty}$ обладает свойством C_N, если существует нетождественная функция $f \in N$, для которой выполнено равенство (**) с $\rho=\varepsilon=0$.

Теорема 5. *Пусть для $E=\langle e_n \rangle_1^{\infty}$ выполнены A, B. Для того, чтобы E обладало свойством C_N необходимо, чтобы одновременно*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|\xi_n|) < \infty \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\log \mathrm{caph}\,(e_n)|^{-1} < \infty.$$

Если для каждого $n \geqslant 1$ e_n есть либо прямолинейный отрезок либо круг, то эти условия являются также достаточными.

Теорема 6. *Пусть $E=\langle e_n \rangle_1^{\infty}$ удовлетворяет A, B, C_N. Если $f \in N$, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log^{+} \| f \|_{e_n}^{-1}}{|\log \operatorname{caph}(e_n)|} (1-|\xi_n|)=\infty$$

тогда и только тогда, когда $f \equiv 0$. *Если к тому же для каждого* $n \geq 1$ e_n *есть либо прямолинейный отрезок либо круг,* $\alpha_n \to 0$ *произвольные положительные числа такие, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \alpha_n^{-1}}{|\log \operatorname{caph}(e_n)|} (1-|\xi_n|)<\infty$$

то существует $f \in N$ *так, что для* $n \geq 1$ $0 < \| f \|_{e_n} \leq \alpha_n$.

Выражаю свою глубокую благодарность академику АН Армянской ССР А. Л. Шагиняну за внимание к работе и постановку задачи.

Армянский педагогический
институт им. Х. Абовяна

Ա. Յու. ՇԱՀՎԵՐԴՅԱՆ

Հիպերբոլական ունակություն և շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների նվազման արագություն

Աշխատանքում ուսումնասիրված է շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների նվազման էքստրեմալ (տարբեր դասերի համար) արագությունները շրջանի որոշակի ենթաբազմությունների վրա, կապված այդ ենթաբազմությունների հիպերբոլական ունակության հետ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *M. Tsuji*, Potential theory in modern function theory, Maruzen, Tokyo, 1959. [2] *А. Л. Шагинян*, ДАН СССР, 129, 2, 284—287 (1959). [3] *А. Л. Шагинян*, „Известия АН Арм. ССР," сер. физ-мат. наук, 12, 1, 3—25 (1959). [4] *M. Heins*, American Journal of mathematics 67, 2, 212—234 (1945). [5] *D. Rung*, Journal of mathematics of Kyoto University, 13, 2, 273—300 (1973). [6] *Ch. Pommerenke*, Michigan Mathematical Journal, 10, 1, 53—63 (1963).