ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVI 1978 2

УДК 513

МАТЕМАТИКА

В. А. Мирзоян

О подмногообразиях с параллельной фундаментальной формой высшего порядка

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александряном 10/XI 1977)

1. В последние годы в геометрии подмногообразий римановых пространств постоянной кривизны интенсивно изучаются подмногообразия, допускающие параллельное нормальное векторное поле ([1–3]). Как показано в ([2]), подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем несут ортогональную сопряженную систему поверхностей. Подмногообразия с сопряженными системами подробно исследованы в ([4]). К классу подмногообразий, допускающих параллельное нормальное векторное поле, относятся, в частности, подмногообразия с параллельной второй фундаментальной формой, которые были исследованы в работах ([5–8]).

В настоящей работе для подмногообразий римановых пространств постоянной кривизны строятся фундаментальные формы высших порядков, определяется условие их параллельности и формулируются две теоремы о подмногообразиях с параллельной фундаментальной формой четного порядка.

2. Пусть $M_n(c)$ является n-мерным римановым пространством постоянной кривизны c, а M_m—некоторым его дифференцируемым подмногообразием размерности m. Обозначим через $T(M_m)$ и $N(M_m)$ касательное и нормальное векторные расслоения подмногообразия M_m соответственно. Риманова связность пространства $M_n(c)$ индуцирует в расслоениях $T(M_m)$ и $N(M_m)$ связности ∇ и $\nabla^{\perp}$ соответственно. Связность ∇ является римановой связностью подмногообразия M_m. Обозначим через α вторую фундаментальную форму подмногообразия M_m, а через A_ξ—второй фундаментальный тензор, соответствующий нормальному векторному полю ξ ([9]). В каждой точке $x\in M_m$ вторая фундаментальная форма α является билинейным симметрическим отображением прямого произведения $T_x(M_m)\times T_x(M_m)$ в нормальное пространство $N_x(M_m)$ к подмногообразию M_m в точке x. Если векторы $\mathbf{e}_i$ $(i,j,k,\dots$ $\dots=1,\dots,m)$ образуют базис в касательном пространстве $T_x(M_m)$,

а векторы e_β ($\beta, \gamma = m+1, \ldots, n$) образуют базис в нормальном пространстве $N_x(M_m)$, то мы можем написать

$$\alpha(e_i, e_j) = b^\beta_{ij} e_\beta.$$

В этой формуле b^β_{ij} называются компонентами второй фундаментальной формы α. Они симметричны по нижним индексам.

Для любого нормального векторного поля ξ второй фундаментальный тензор A_ξ в каждой точке $x \in M_m$ является эндоморфизмом касательного пространства $T_x(M_m)$. Если $\tilde{g}$ — риманова метрика на $M_n(c)$, а g — риманова метрика на M_m, индуцированная метрикой $\tilde{g}$, то имеет место равенство ([3])

$$\tilde{g}(\alpha(X, Y), \xi) = g(A_\xi(X), Y), \tag{1}$$

где X, Y — произвольные касательные векторные поля.

Вектором средней кривизны подмногообразия M_m называется вектор

$$H = b^\beta_{ij} g^{ij} e_\beta, \tag{2}$$

где g^{ij} являются контравариантными компонентами римановой метрики g.

3. Пусть в касательном расслоении подмногообразия M_m определено тензорное поле T типа $(0, r)$ со значениями в нормальном расслоении. Определим для этого тензорного поля оператор ковариантного дифференцирования $\bar{\nabla}$ следующей формулой:

$$(\bar{\nabla}_W T)(X_1, \ldots, X_r) = \nabla^\perp_W T(X_1, \ldots, X_r) -$$
$$- T(\nabla_W X_1, \ldots, X_r) - \cdots - T(X_1, \ldots, \nabla_W X_r), \tag{3}$$

где $X_1, \ldots, X_r$, W — произвольные касательные векторные поля. Новое тензорное поле $\bar{\nabla} T$ также принимает значения в нормальном расслоении. В данной точке $x \in M_m$ значение $\bar{\nabla}_W T$ зависит только от значения W_x векторного поля W в этой точке. Оператор $\bar{\nabla}$ называется ковариантным дифференцированием Ван дер Вардена-Бортолотти ([3]).

Если $T^\beta_{i_1 \ldots i_r}$ ($i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_r = 1, \ldots, m$) — компоненты тензорного поля T, то из формулы (3) следует, что

$$\bar{\nabla}_W T^\beta_{i_1 \ldots i_r} = W(T^\beta_{i_1 \ldots i_r}) + T^\gamma_{i_1 \ldots i_r} \omega^\beta_\gamma(W) - T^\beta_{k i_2 \ldots i_r} \omega^k_{i_1}(W) - \ldots - T^\beta_{i_1 \ldots k} \omega^k_{i_r}(W), \tag{4}$$

где ω^k_i и ω^β_γ — локальные формы связностей ∇ и $\nabla^\perp$ соответственно.

Определение. Будем говорить, что тензорное поле T типа $(0, r)$, определенное в касательном расслоении подмногообразия M_m со значениями в нормальном расслоении, параллельно (или ковариантно постоянно), если $\overline{\nabla}_X T = 0$ для любого касательного векторного поля $\mathbf{X}$.

4. Применим теперь оператор ковариантного дифференцирования $\overline{\nabla}$ ко второй фундаментальной форме α. Из уравнения Кодацци (3) следует, что $\overline{\nabla}_{e_k} b^{\xi}_{ij}$ симметрична по индексам i, j, k, где $\mathbf{e}_k$ — базисный касательный вектор. Обозначая ее через b^{ξ}_{ijk}, можем написать

$$\overline{\nabla}_{e_k} b^{\xi}_{ij} = b^{\xi}_{ijk}.$$

Применяя к этому равенству $\overline{\nabla}_{e_l}$, получим

$$\overline{\nabla}_{e_l} b^{\xi}_{ijk} = b^{\xi}_{ijkl},$$

где b^{ξ}_{ijkl} симметричны по первым трем индексам. Дальнейшее построение функций $b^{\xi}_{i_1 \ldots i_{r+1}}$, симметричных по первым трем индексам, проводится по рекуррентной формуле

$$\overline{\nabla}_{e_{i_{r+1}}} b^{\xi}_{i_1 \ldots i_r} = b^{\xi}_{i_1 \ldots i_r i_{r+1}}.$$

Таким образом, для каждого ξ можем записать следующую последовательность функций:

$$b^{\xi}_{i_1 i_2 i_3}, \ \ldots, \ b^{\xi}_{i_1 \ldots i_r}, \ \ldots$$

Определим в расслоении r-линейных отображений касательного расслоения подмногообразия M_m в нормальное расслоение сечение α_r следующей формулой:

$$(\alpha_r)_x(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_r) = b^{\xi}_{i_1 \ldots i_r} \mathbf{X}_1^{i_1} \ldots \mathbf{X}_r^{i_r} \mathbf{e}_{\xi},$$

где $\mathbf{X}_u = \mathbf{X}_u^i \mathbf{e}_i \in T_x(M_m)$, $u = 1, \ldots, r$. Из симметричности $b^{\xi}_{i_1 \ldots i_r}$ по первым трем индексам следует, что сечение α_r симметрично по первым трем аргументам, а из ее определения выше написанной формулой, непосредственно усматривается, что оно r-линейно. Сечение α_r будем называть r-ой фундаментальной формой подмногообразия M_m.

5. С каждой фундаментальной формой четного порядка α_{2s} ($r = 2s$) подмногообразия M_m можно ассоциировать некоторую билинейную симметрическую форму β_{2s}, определяя ее формулой

$$\beta_{2s}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = C^{\xi}_{i_1 j_1} \mathbf{X}^{i_1} \mathbf{Y}^{j_1} \mathbf{e}_{\xi},$$

где

$$C^{\xi}_{i_1 j_1} = b^{\xi}_{i_1 j_1 i_2 j_2 \ldots i_s j_s} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_s j_s} \tag{5}$$

а $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in T_x(M_m)$. Форму β_{2s} мы будем называть $2s$-ой билинейной фундаментальной формой подмногообразия M_m.

Замечание. Формулы, аналогичные (5), можно получить, если указанные свертки проводить не обязательно по двум соседним индексам, а в произвольном порядке, оставляя при этом индексы i_1, j_1 свободными.

Теперь с каждой билинейной фундаментальной формой β_{2s} свяжем некоторый эндоморфизм $B_{2s}(\xi)$ касательного пространства $T_x(M_m)$, соответствующий нормальному векторному полю ξ, следующим образом. Положим

$$B_{2s}(\xi)\mathbf{X} = C^j_{\beta i}\xi^\beta \mathrm{X}^i \mathbf{e}_j,$$

где ξ^β — координаты вектора ξ, $\mathbf{X}\in T_x(M_m)$ — произвольный касательный вектор, а

$$C^j_{\beta i} = C^\gamma_{ik} g_{\gamma\beta} g^{kj}.$$

При таком определении эндоморфизма $B_{2s}(\xi)$ для произвольных касательных векторов $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}\in T_x(M_m)$ выполняется следующее равенство:

$$\bar{g}(\beta_{2s}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \xi) = g(B_{2s}(\xi)\mathbf{X}, \mathbf{Y}),$$

которое является аналогом равенства (1). Эндоморфизмы $B_{2s}(\xi)$ мы будем называть $2s$-ми фундаментальными тензорами подмногообразия M_m.

С каждой билинейной фундаментальной формой β_{2s} подмногообразия M_m мы свяжем также некоторое нормальное векторное поле H_s следующим образом. Пусть C^γ_{ij} — компоненты формы β_{2s}, определенные формулой (5). Определим вектор H_s в точке $x\in M_m$ по формуле:

$$\mathbf{H}_s = C^\beta_{ij} g^{ij} \mathbf{e}_\beta.$$

По аналогии с вектором средней кривизны, определенным формулой (2), вектор $\mathbf{H}_s$ будем называть вектором s-й средней кривизны подмногообразия M_m. Нетрудно показать, что вектор $\mathbf{H}_s$ определен инвариантно.

6. В настоящем n^0 сформулируем две теоремы о подмногообразиях с параллельной фундаментальной формой четного порядка.

Теорема 1. *Пусть M_m является полным, связным, односвязным подмногообразием пространства постоянной кривизны $M_n(c)$ с параллельной $2s$-й фундаментальной формой α_{2s}. Тогда вектор s-й средней кривизны $\mathbf{H}_s$ параллелен в нормальном расслоении.*

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Если $B_{2s}(\mathbf{H}_s)$ — $2s$-й фундаментальный тензор подмногообразия M_m отвечающий вектору s-й средней кривизны $\mathbf{H}_s$, то*

(1) *$B_{2s}(\mathbf{H}_s)$ является ковариантно постоянным относительно связности ∇;*

(2) *собственные значения $B_{2s}(\mathbf{H}_s)$ постоянны;*

(3) *распределения*

$$T^\lambda = \{\mathbf{X}\in T_x(M_m);\ B_{2s}(\mathbf{H}_s)\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}\},$$

где λ пробегает собственные значения $B_{2s}(\mathbf{H}_s)$, параллельны и инволютивны;

(4) *если* $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ — *собственные значения* $B_{ss}(H_s)$ *(с учетом кратностей), то подмногообразие* M_m *разлагается в прямое произведение интегральных подмногообразий* M^{λ_γ}, $\gamma = 1, \ldots, \mu$, *соответствующих распределениям* T^{λ_γ}, *т. е.,*

$$M_m = M^{\lambda_1} \times \cdots \times M^{\lambda_\mu}.$$

Каждое интегральное подмногообразие M^{λ_γ} *является вполне геодезическим в* M_m.

Доказательство теоремы 2 существенно опирается на Предложение 1 в ([3]) и при $s = 1$ частично обобщает Предложение 1 в ([8]).

Выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю Ю. Г. Лумисте за постановку задачи и ценные указания при написании настоящей работы.

Тартуский государственный университет

Վ. Ա. ՄԻՐԶՈՅԱՆ

Զուգահեռ բարձր կարգի ֆունդամենտալ ձև ունեցող ենթաբազմաձևությունների մասին

Ներկա աշխատանքում n չափի հաստատուն կորության $M_n(c)$ տարածության մեջ դիտարկվում է m չափի դիֆերենցիալ ենթաբազմաձևություն M_m: Կիրառելով Վան դեր Վարդենի-Բորտոլոտիի կովարիանտ դիֆերենցումը երկրորդ ֆունդամենտալ ձևի նկատմամբ, M_m ենթաբազմաձևության համար կառուցվում են բարձր կարգի ֆունդամենտալ ձևեր և բարձր կարգի ֆունդամենտալ տենզորներ: Որոշվում է բարձր կարգի ֆունդամենտալ ձևի զուգահեռության պայմանը և դիտարկվում են ենթաբազմաձևություններ, որոնց զույգ կարգի բարձր ֆունդամենտալ ձևը զուգահեռ է:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Ю. Г. Лумисте*, Сб. «Алгебра. Топология. Геометрия. Итоги науки. ВИНИТИ. 13. 273—340. 1975. [2] *Ю. Г. Лумисте, А. В. Чакмазян*, «Известия высш. уч. завед.». Математика, 5, 148—157 (1974). [3] *B.-Y. Chen*, Geometry of submanifolds (Pure and Appl. Math., №22), New York, Marcel Dekker, 1973. [4] *В. В. Рыжков*, Тр. Моск. матем. о-ва, т. 7, 179—226 (1958). [5] R. *Walden*, Manuscripta Math., 10, 91—102 (1973). [6] *D. Ferus*, Math. Ann., 211, 1—5 (1974). [7] *D. Ferus*, Manuscripta Math., 12, 153—162 (1974). [8] *D. Ferus*, Math. Z., 140, 87—92 (1974).