ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
LXVI 1978 1

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. П. Мелконян

Осесимметричная контактная задача для сплошного цилиндра

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. М. Сапонджяном 28/X 1977)

Осесимметричные контактные задачи для сплошных и полых бесконечных цилиндров исследовались Окубо [1], П. З. Лифшицем [2], В. М. Александровым [3,4], Г. Я. Поповым [5] и др. В работах [6,7] приводится решения осесимметричной задачи для цилиндра конечной длины в случае смешанных граничных условий на одной или обеих торцевых плоскостях.

Осесимметричная задача для бесконечного цилиндра, ослабленного по плоскости $z=0$ одной центральной монетообразной или кольцеобразной трещиной при смягченных граничных условиях на цилиндрической поверхности (условия типа гладкого штампа) была рассмотрена в работах Снеддона и Тейта [8], Б. А. Кудрявцева и В. З. Партона [9].

В настоящей работе приводится решение осесимметричной задачи теории упругости для цилиндра конечной длины, когда граничные условия как на цилиндрической поверхности, так и на обеих торцевых плоскостях заданы в смешанном виде. Предполагается, что касательные напряжения на всей поверхности цилиндра отсутствуют. Решение задачи представлено в виде суммы рядов Фурье и Фурье-Дини, коэффициенты которых определяются из системы трех парных рядов-уравнений. Далее задача сведена к решению совокупности трех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, свободные члены которых стремятся к нулю при возрастании индекса. Доказывается, что эти системы не только квази-вполне регулярны, но и суммы модулей коэффициентов при неизвестных стремятся к нулю. Получены формулы для контактных напряжений с выделенными особенностями.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для цилиндра радиуса R и длины l, когда цилиндр сжимается двумя жесткими круглыми гладкими штампами (неодинакового радиуса), приложенными на торцах, а граничные условия на цилиндрической поверхности также заданы в смешанном виде (рис. 1). Таким образом, граничные условия для рассматриваемой задачи запишутся в виде

$$\tau_{rz}(r, 0) = \tau_{rz}(r, l) = \tau_{zr}(R, z) = 0 \qquad (1.1)$$

$$u_z(r, 0) = \eta_1(r), \quad (0 \leqslant r \leqslant a_1); \quad \sigma_z(r, 0) = f_1(r), \quad (a_1 < r \leqslant R);$$

$$u_z(r, l) = \eta_2(r), \quad (0 \leqslant r \leqslant a_2); \quad \sigma_z(r, l) = f_2(r), \quad (a_2 < r \leqslant R); \qquad (1.2)$$

$$u_r(R, z) = \eta_3(z) \quad (0 \leqslant z \leqslant h); \quad \sigma_r(R, z) = f_3(z), \quad (h < z \leqslant l);$$

где $f_i(x)$ — интегрируемые, а $\eta_i(x)$ — кусочно-гладкие функции.

Бигармоническую функцию Лява представим в виде суммы рядов Фурье и Фурье—Дини:

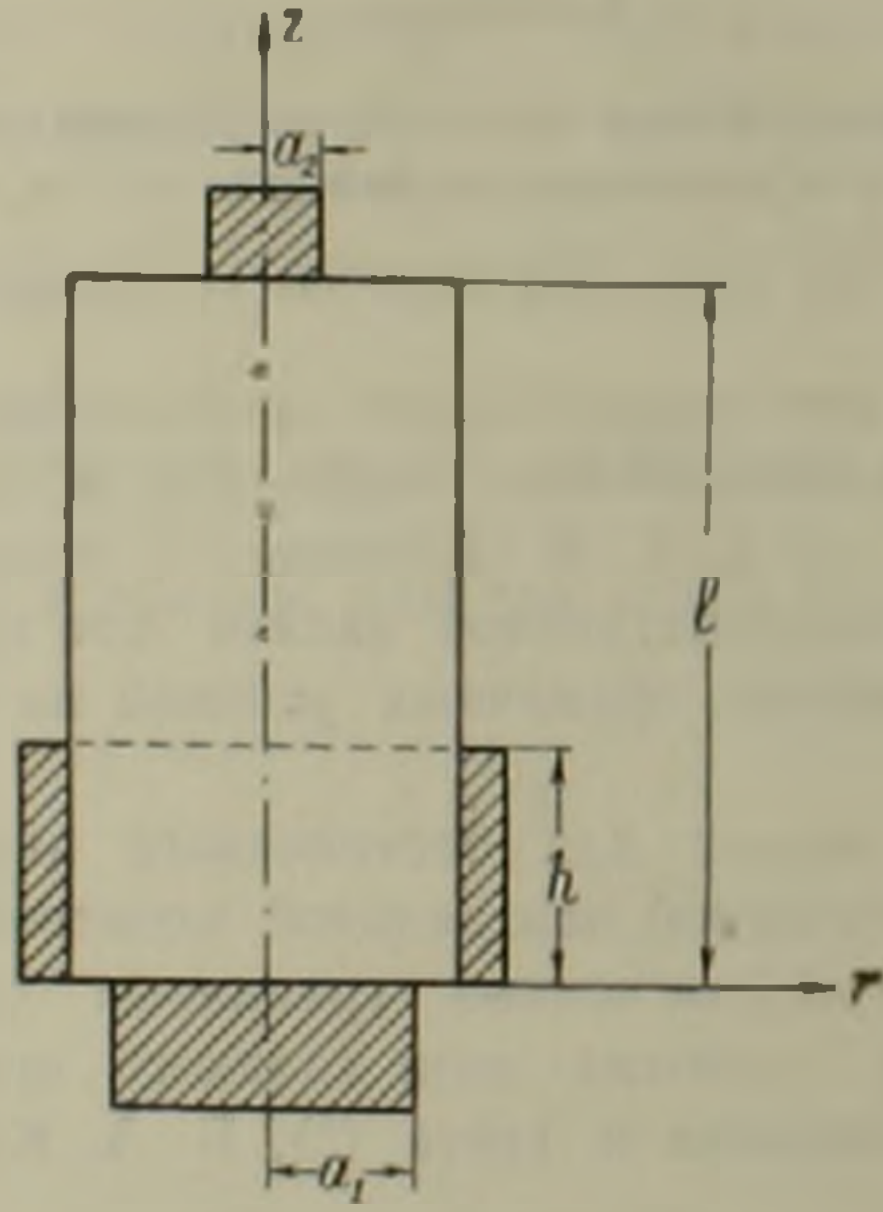

Рис. 1

$$\Phi(r, z) = \frac{z^3}{6(1+\nu)}\left[(1-2\nu)Z_0^{(1)} + 2(2-\nu)Z_0^{(3)}\right] + \frac{z^2}{2(1-2\nu)}Z_0^{(3)} +$$

$$+ \frac{zr^2}{2(1+\nu)}\left[\nu Z_0^{(1)} - (1-\nu)Z_0^{(3)}\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty}\left[Z_k^{(1)}\gamma_k(z) + Z_k^{(2)}\gamma_k(l-z)\right]\lambda_k^{-2}J_0(\lambda_k r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_k^{(3)}}{\alpha_k^2}\left[\alpha_k\Omega_k(r) - 2(2-\nu)\frac{I_0(\alpha_k r)}{I_1(\omega_k)}\right]\sin\alpha_k z, \qquad (1.3)$$

где

$$\Omega_k(r)\cdot I_1^2(\omega_k) = rI_1(\omega_k)I_1(\alpha_k r) - RI_2(\omega_k)I_0(\alpha_k r)$$

$$\Delta_k\gamma_k(z) = \gamma_k\varphi_k(z) + \operatorname{sh}\gamma_k\cdot\varphi_k(l-z),$$

$$\varphi_k(z) = (\gamma_k - \lambda_k z)\operatorname{sh}\lambda_k z + 2\nu\operatorname{ch}\lambda_k z, \qquad (1.4)$$

$$\Delta_k = \operatorname{sh}^2\gamma_k - \gamma_k^2; \quad \omega_k = \alpha_k R, \quad \alpha_k = \pi k/l; \quad \gamma_k = \lambda_k l.$$

ν—коэффициент Пуассона, G—модуль сдвига, λ_k—неотрицательные корни уравнения $I_1(\lambda_k R)=0$, $I_l(x)$ и $I_l(x)$—функции Бесселя, $Z_k^{(l)}$—неизвестные постоянные.

Как следует из (1.3), граничные условия (1.1) удовлетворяются тождественно, а условия (1.2) приводят к следующей системе из трех парных рядов-уравнений относительно неизвестных $Z_k^{(l)}$:

$$\frac{Z_0^{(2)}}{2(1-\nu)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(1+R_k)Z_k^{(1)}+T_kZ_k^{(2)}\right]\frac{J_0(\lambda_k R)}{\lambda_k}=\frac{G}{1-\nu}\tau_1(r),$$

$$(0\leqslant r\leqslant a_1) \qquad (1.5)$$

$$Z_0^{(1)}-\sum_{k=1}^{\infty}Z_k^{(1)}J_0(\lambda_k r)+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2Z_k^{(3)}\Omega_k(r)=f_1(r),\quad (a_1\leqslant r\leqslant R)$$

$$\frac{Z_0^{(2)}}{2(1-\nu)}+\frac{l}{2(1-\nu^2)}(Z_0^{(1)}-2\nu Z_0^{(3)})+\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_kZ_k^{(1)}+(1+R_k)Z_k^{(2)}\right]\frac{J_0(\lambda_k r)}{\lambda_k}=$$

$$=\frac{G}{1-\nu}\tau_2(r),\quad (0\leqslant r\leqslant a_2) \qquad (1.6)$$

$$Z_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}Z_k^{(2)}J_0(\lambda_k r)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\alpha_k^2Z_k^{(3)}\Omega_k(r)=f_2(r),\quad (a_2<r\leqslant R)$$

$$\frac{R}{2(1-\nu^2)}\left|(1-\nu)Z_0^{(3)}-\nu Z_0^{(1)}\right|+\sum_{k=1}^{\infty}Z_k^{(3)}\cos\lambda_k z=\frac{G}{1-\nu}\tau_3(z),$$

$$(0\leqslant z\leqslant h) \qquad (1.7)$$

$$Z_0^{(3)}+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(1-Q_k)Z_k^{(3)}\cos\alpha_k z+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k(z)Z_k^{(1)}-\varphi_k(l-z)Z_k^{(2)}\right]J_0(\lambda_k r)=f_3(r),\quad (h<z\leqslant l)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\Delta_kR_k=\operatorname{sh}\gamma_k\operatorname{ch}\gamma_k+\gamma_k-\Delta_k,\quad \Delta_kT_k=\gamma_k\operatorname{ch}\gamma_k+\operatorname{sh}\gamma_k$$

$$Q_k=1+\alpha_k\Omega_k(R)+\frac{2(1-\nu)}{\alpha_kR}. \qquad (1.8)$$

Функции $f_l(r)$, заданные соответственно в интервалах $[a_l, R]$, продолжим непрерывным образом на полный интервал $[0, R]$ и разложим их в ряды Фурье-Дини.

$$f_l(r)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k^{(l)}J_0(\lambda_k r)\qquad (l=1, 2)$$

$$f_k^{(l)}=\frac{2}{R^2J_0^2(\lambda_kR)}\int_0^R rf_l(r)J_0(\lambda_k r)dr$$

и далее, следуя ([10,11]), неизвестные $Z_k^{(l)}$ ищем в виде

$$(-1)^i Z_k^{(i)} = f_k^{(i)} - \frac{4\lambda_k^2}{RJ_0(\lambda_k R)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(i-1)m} \alpha_m^2 Z_m^{(3)}}{(\alpha_m^2 + \lambda_k^2)^2} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k a_i} J_0(\lambda_k R)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(i)} J_{2m+1/2}(\lambda_k a_i), \qquad \begin{matrix} (k = 1, 2, \ldots) \\ (i = 1, 2) \end{matrix} \qquad (1.9)$$

при этом $Z_0^{(i)}$ получается из (1.9) предельным переходом при $\lambda_k \to \lambda_0 = 0$ и имеет вид

$$Z_0^{(1)} = f_0^{(1)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} b_0^{(1)} = f_0^{(2)} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} b_0^{(2)}. \qquad (1.10)$$

В силу представления (1.9) и разложений Фурье—Дини

$$\Omega_k(r) = \frac{4}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2 J_0(\lambda_m r)}{(\alpha_k^2 + \lambda_m^2)^2 J_0(\lambda_m R)}, \qquad (0 \leqslant r \leqslant R),$$

$$\frac{(2a)^{1/2}\Gamma(s+1/2)}{R^2\Gamma(1+s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2s+1/2}(\lambda_k a) J_0(\lambda_k r)}{\lambda_k^{1/2} J_0^2(\lambda_k R)} = \qquad (1.11)$$

$$= \begin{cases} (a^2 - r^2)^{-1/2} F(-s, s+1/2; 1; r^2/a^2) & (0 \leqslant r < a) \\ 0 & (a < r \leqslant R) \end{cases}$$

нетрудно убедиться, что вторые уравнения систем (1.5) и (1.6) удовлетворяются тождественно. Подставляя (1.9) в первые уравнения систем (1.5) и (1.6), и далее пользуясь (1.11) и значением рядов ([11,14])

$$\frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2m+1/2}(\lambda_k a) J_{2s+1/2}(\lambda_k a)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} = \frac{\delta_{ms}}{4s+1} + \qquad (m^2 + s^2 \neq 0)$$

$$+ \frac{2(-1)^{m+s}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2m+1/2}\left(\frac{ay}{R}\right) I_{2s+1/2}\left(\frac{ay}{R}\right) dy, \qquad (1.12)$$

$$\frac{2}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{1/2}(\lambda_k a) J_{1/2}(\lambda_k r)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} = \frac{2 \cdot \min(a, r)}{\sqrt{ar}} - \frac{4\sqrt{ar}}{\pi R} -$$

$$- \frac{4\sqrt{ar}}{\pi R} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y^2 I_1(y)} \left| 2y I_1(y) - \frac{R^2}{ar} \operatorname{sh} \frac{ay}{R} \cdot \operatorname{sh} \frac{ry}{R} \right| dy,$$

после некоторых преобразований ([11]) для определения постоянных $b_m^{(i)}$ окончательно получим следующую совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$[1 - \gamma_{s0}] b_s^{(i)} = -\sum_{m=0}^{\infty} c_{ms}^{(i)} b_m^{(i)} + \sum_{m=0}^{\infty} d_{ms}^{(i)} b_m^{(3-i)} + \qquad (1.13)$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} x_m^2 \omega_{ms}^{(i)}(a_i) Z_m^{(3)} + (-1)^i f_s^{(i)} + \frac{a_1}{a_2} \mu_2 Z_0^{(2)} [1-(-1)^i] \delta_{s0} -$$

$$-(\mu_1 Z_0^{(1)} + \mu_2 Z_0^{(2)} - \mu Z_0^{(3)}) [1+(-1)^i] \delta_{s0} \quad \begin{pmatrix} s=0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots \\ i=1,\ 2 \end{pmatrix}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$c_{ms}^{(i)} = 2(4s+1) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k J_{2m+1/2}(\lambda_k a_i) J_{2s+1/2}(\lambda_k a_i)}{(\lambda_k R)^2 J_0^2(\lambda_k R)} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^{m+s}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_{2m+1/2}\left(\frac{a_i y}{R}\right) \cdot I_{2s+1/2}\left(\frac{a_i y}{R}\right) dy \right|, \quad (m^2+s^2 \neq 0)$$

$$d_{ms}^{(i)} = 2(4s+1) \sqrt{\frac{a_i}{a_{3-i}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_k J_{2m+1/2}(\lambda_k a_{3-i}) J_{2s+1/2}(\lambda_k a_i)}{(\lambda_k R)^2 J_0^2(\lambda_k R)}, \qquad (1.14)$$

$$\omega_{ms}^{(i)} = 8(4s+1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda_k a_i} [1+R_k-(-1)^m T_k] (-1)^{m(i-1)} J_{2s+1/2}(\lambda_k a_i)}{R^3 (\alpha_m^2+\lambda_k^2)^2 J_0(\lambda_k R)},$$

$$t_s^{(i)} = 2(4s+1) \left| \frac{\sqrt{a_1}}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+R_k) f_k^{(i)} - T_k f_k^{(3-i)}}{\lambda_k^{3/2}} (-1)^{(i-1)} J_{2s+1/2}(\lambda_k a_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}(i)^i \Gamma(1+s)}{(1-\nu)\Gamma(s+1/2) R^2} \int_0^{a_i} r(a_i^2-r^2)^{-1/2} \nu_{ii}(r) F(-s,\ s+1/2;\ 1;\ r^2/a_i^2)\, dr \right|.$$

$$c_{00}^{(i)} = 4 - \frac{8a_i}{\pi R} + \frac{8a_i}{\pi R} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y^2 I_1(y)} \left| \frac{R^2}{a_i^2} \operatorname{sh}^2 \frac{a_i y}{R} - 2y I_1(y) \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2R J_{1/2}^2(\lambda_k a_i)}{(\lambda_k R)^2 J_0^2(\lambda_k R)},$$

$$\mu_1 = \frac{a_2 l}{R^2(1-\nu^2)\sqrt{2\pi}}, \qquad \mu_2 = \frac{a_2}{R^2(1-\nu)\sqrt{2\pi}}, \qquad \mu_3 = 2\nu\mu_1$$

где $\Gamma(z)$—гамма функция, $F(\alpha, \beta; \gamma, z)$—гипергеометрический ряд, $K_n(z)$—функция Макдональда, δ_{ms}—символ Кронекера.

Пользуясь точным решением парных рядов-уравнений по косинусам ([12, 13]), для определения неизвестных коэффициентов $Z_n^{(3)}$ из парных рядов-уравнений (1.7) получаем следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$Z_n^{(3)} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{\infty} p_{kn}^{(i)} Z_k^{(i)} + p_n Z_0^{(3)} - q_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \qquad (1.15)$$

где введены следующие обозначения:

$$p_{kn}^{(1)}=\int_{\varphi_0}^{\pi}\Phi_k(\theta)z_n(\cos\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta,\qquad p_{kn}^{(2)}=\int_{\varphi_0}^{\pi}\Psi_k(\theta)z_n(\cos\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta,$$

$$p_{kn}^{(3)}=\frac{kQ_k}{2}\int_{\varphi_0}^{\pi}z_k(\cos\theta)z_n(\cos\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta,\quad p_n=\frac{ly_n(\cos\varphi_0)}{\pi n},$$

$$q_n=\int_0^{\varphi_0}H(\theta)z_n(\cos\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta+\int_{\varphi_0}^{\pi}F(\theta)z_n(\cos\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta, \tag{1.16}$$

$$\Phi_k(\theta)=\frac{\sqrt{2}\,l\,J_0(l_kR)}{\pi^2}\int_\theta^\pi\frac{\varphi_k\left(\frac{l\varphi}{\pi}\right)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}},$$

$$\Psi_k(\theta)=-\frac{\sqrt{2}\,lJ_0(l_kR)}{\pi^2}\int_\theta^\pi\frac{\varphi_k\left(\frac{l(\pi-\varphi)}{\pi}\right)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

$$F(\theta)=\frac{\sqrt{2}\,l}{\pi^2}\int_\theta^\pi\frac{f_3\left(\frac{l\varphi}{\pi}\right)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}},\quad H(\theta)=\frac{\sqrt{2}G}{(1-\nu)\pi}\int_\theta^{\varphi_0}\frac{\tau_0\left(\frac{l\varphi}{\pi}\right)\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}$$

$$y_k(x)=P_{k-1}(x)+P_k(x),\quad z_k(x)=P_{k-1}(x)-P_k(x),\quad \varphi_0=\pi h/l,$$

$P_k(x)$ — полиномы Лежандра, а знак (′) означает производную по φ.

Постоянное $Z_0^{(3)}$ будет определено из следующего уравнения, получаемого из условия интегрируемости контактных напряжений с использованием бесконечных систем (1.15)

$$\left(\frac{l}{\pi}\ln\sin^2\frac{\varphi_0}{2}-\varepsilon_2\right)Z_0^{(3)}+\varepsilon_1Z_0^{(1)}=\frac{G}{1-\nu}\tau_0(0)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[Z_n^{(1)}\int_{\varphi_0}^{\pi}\Phi_n(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta+Z_n^{(2)}\int_{\varphi_0}^{\pi}\Psi_n(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}Q_nZ_n^{(3)}y_n(\cos\varphi_0)-\int_0^{\varphi_0}H(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta-\int_{\varphi_0}^{\pi}F(\theta)\operatorname{ctg}\theta/2\,d\theta.$$

2. Докажем, что полученные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (1.13) и (1.15) не только квази-вполне регулярны, но и сумма модулей коэффициентов при возрастании номера строки стремится к нулю, то есть

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\omega_{ms}^{(l)}|=\lim_{s\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|c_{ms}^{(l)}|=\lim_{s\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}|d_{ms}^{(l)}|=\lim_{s\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|p_{ks}^{(l)}|=0. \tag{2.1}$$

Докажем первое из этих отношений. С этой целью оценим главную часть выражения $\omega^{(l)}_{ms}$.

Пользуясь формулами ([11])

$$\int_0^c t^{\nu}(c^2-t^2)^{p/2}F(-s,\ \nu+s+p/2;\ \nu;\ t^2/c^2)\cdot J_{\nu-1}(\beta t)dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu)\cdot\Gamma(1+s+p/2)c^{\nu+p+1}}{2\left(\frac{c\cdot\beta}{2}\right)^{1+p/2}\Gamma(\nu+s)}\cdot J_{2s+\nu+p/2}(\beta c), \qquad (2.2)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_k r)}{(\alpha_m^2+\lambda_k^2)J_0(\lambda_k R)} = \frac{RI_0(\alpha_m r)}{2\alpha_m I_1(\alpha_m R)},$$

нетрудно получить оценку для $\omega^{(l)}_{ms}$ при $s\geqslant 2$:

$$|\omega^{(l)}_{ms}| = \frac{2(4s+1)\sqrt{a_l}}{\alpha_m R^{3/2}}\left|\frac{d}{d\alpha_m}\left[\frac{I_{2s+3/2}(\alpha_m a_l)}{\sqrt{\alpha_m R}I_1(\alpha_m R)}\right]\right| + \gamma(\alpha_m, s). \qquad (2.3)$$

Для фиксированных s слагаемое $\gamma(\alpha_m, s)$ в формуле (2.3) при $\alpha_m\to\infty$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка по сравнению с первым слагаемым. При фиксированном же α_m, когда $s\to\infty$, слагаемое $\gamma(\alpha_m, s)$ имеет тот же порядок малости, что и первое слагаемое в (2.3).

Из оценки видно, что ряд $\sum_{m,s=1}^{\infty}|\omega^{(l)}_{m,s}|$ сходится и, следовательно,

$\sum_{m,s=1}^{\infty}|\omega^{(l)}_{m,s}| \to 0$ при $s\to\infty$

Сумма $\sum_{k=1}^{\infty}|p^{(l)}_{ks}|$ при $l=1,2$ стремится к нулю, по крайней мере, как $s^{-3/2}$, а при $l=3$ стремится к нулю как $s^{-1}\ln s$, что подробно показано в работе ([6]). Суммы же $\sum_{m=0}^{\infty}|c^{(l)}_{ms}|$ и $\sum_{m=0}^{\infty}|d^{(l)}_{ms}|$ исследовались в работе ([7]), где показано, что при возрастании s они стремятся к нулю как $c^{2s+3/2}/\Gamma(2s+3/2)$. Из вышеизложенного следует, что все суммы, входящие в (2.1), стремятся к нулю, а, следовательно, бесконечные системы в общем случае квази-вполне регулярны.

Нетрудно заметить также, что при условиях, наложенных на функции $f_l(z)$ и $\eta_l(z)$, свободные члены бесконечных систем стремятся к нулю по крайней мере как $0(s^{-1})$.

Отметим, что факт стремления к нулю суммы модулей коэффициентов бесконечных систем существенно облегчает вычислительные работы при рассмотрении конкретных примеров.

3. Ряды, входящие в выражения напряжений и перемещений, сходятся достаточно быстро внутри области цилиндра. На границах же области ($r=R,\ z=0,l$) сходимость этих рядов ухудшается, и

формулы (1.3) непригодны для вычислений контактных напряжений и перемещений вне контакта. Однако, предварительно улучшив сходимость этих рядов и выделив при этом соответствующие особенности, можно получить формулы, пригодные для вычисления напряжений и перемещений как на торцевых плоскостях $z=0,l$, так и на цилиндрической поверхности $r=R$.

Пользуясь формулами (1.3), (1.9) и (1.11) для контактных напряжений σ_z, получим следующее выражение

$$\sigma_z\left(r,\ \frac{1+(-1)^i}{2}\,l\right)=f_i(r)+\frac{R^2\bar{H}(a_i-r)}{a_i\sqrt{2(a_i^2-r^2)}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m^{(i)}\Gamma(1+m)}{\Gamma(m+1/2)}\times$$

$$\times F(-m,\ m+1/2;\ 1,\ r^2/a_i^2), \qquad (2.4)$$

где $\bar{H}(x)$—функция Хевисайда

$$\bar{H}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0.\end{cases}$$

Коэффициент при особенности $(a_i^2-r^2)^{-1/2}$ в формуле (2.4) в окрестности точки $r=a_i$ имеет вид

$$K=\frac{R^2}{\sqrt{2\pi a_i}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m b_m^i.$$

Для сил P_i, действующих на круглые штампы, приложенные к торцам цилиндра, из (2.4) получим выражение

$$P_i=2\pi\int_0^{a_i} r\sigma_z\left(r,\ \frac{1+(-1)^i}{2}l\right)dr=$$

$$=2\pi\int_0^{a_i} rf_i(r)dr+\sqrt{2\pi}\,R^2b_0^{(i)}=\pi R^2Z_0^{(1)}-2\pi\int_{a_i}^{R_i} rf_i(r)dr. \qquad (2.5)$$

Пользуясь результатами, приведенными в работе ([10]), из (1.3) получаем следующую формулу для контактных напряжений $\sigma_r(R,z)$

$$\sigma_r(R,z)=\frac{A\cos\varphi/2}{(\cos\varphi-\cos\varphi_0)^{1/2}}-D(\varphi)\qquad(0\leqslant\varphi<\varphi_0) \qquad (2.6)$$

$$\left(\varphi=\frac{\pi z}{l},\quad \varphi_0=\frac{\pi h}{l}\right),$$

где коэффициент A при особенности имеет вид

$$A=\frac{\sqrt{2\pi}}{l}\left\{\frac{l}{\pi}Z_0^{(3)}-H(\varphi_0)+F(\varphi_0)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big|\ Z_k^{(1)}\Phi_k(\varphi_0)+\right.$$

$$\left.+Z_k^{(2)}\Psi_k(\varphi_0)+\frac{1}{2}kQ_kZ_k^{(3)}z_k(\cos\varphi_0)\Big|\right\} \qquad (2.7)$$

и регулярная часть контактного напряжения выражается формулой

$$D(\varphi)=\frac{\pi\sqrt{2}}{l}\cos\frac{\varphi}{2}\left\{\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{F'(\theta)d\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}+\int_{\varphi}^{\varphi_0}\frac{\gamma'(\theta)d\theta}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}}\right\}, \quad (2.8)$$

где

$$\chi(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[Z_k^{(1)}\Phi_k(\theta)+Z_k^{(2)}\Psi_k(\theta)+1/2\,kQ_kZ_k^{(3)}z_k(\cos\theta)\right]-H(\theta).$$

В заключение приведем ряд задач, которые представляются интересными и решения которых как частный случай могут быть получены из решения задачи, рассмотренной в настоящей работе.

а) Полагая $\gamma_{11}(r)=0$, $a_1\neq 0, R$, $a_2=0$, получаем решение задачи об осесимметричной деформации конечного цилиндра, ослабленного в плоскости $z=0$ внешней кольцевой трещиной $a_1\leqslant r\leqslant R$, к поверхности которой, в общем случае, приложены давления $f_1(r)$. Деформация цилиндра осуществляется также нормальными напряжениями $f_2(r)$, приложенными к торцевым плоскостям $z=\pm l$ и радиальными силами $f_3(z)$, приложенными к части цилиндрической поверхности $h<|z|<l$, $r=R$, а также гладким диском, симметрично насаженным на цилиндр.

б) В задаче, приведенной в пункте а), граничные условия по цилиндрической поверхности могут быть заданы однородно, т. е. в одном случае ($h=0$) по цилиндрической поверхности заданы только радиальное давление $f_3(z)$, а в другом случае ($h=l$) цилиндр по всей длине заключен в полый гладкий жесткий цилиндр, внутренняя поверхность которого определяется формулой $r=R+\gamma_{12}(z)$; если при этом устремить l к бесконечности, то получим задачу о бесконечном цилиндре, ослабленном кольцеобразной трещиной, которая методом Снеддона ([8]) подробно исследована в работе ([9]).

Если же при $h=0$ полагать $a_1=a_2$, $\gamma_{12}(r)=c$, $f_2(r)=f_1(r)$, то получим задачу о растяжении бесконечного цилиндра силами P, приложенными на бесконечности, когда цилиндр ослаблен периодическими кольцеобразными трещинами. При этом $P=\theta c$, где значение θ определяется из соотношения (2.5).

в) Если положить $\gamma_{12}(r)=0$, $a_1=0$, $0<a_2<R$, то получим решение задачи о деформации цилиндра, ослабленного в сечении $z=l$ кольцеобразной трещиной, к поверхности которой в общем случае приложено давление $f_2(r)$. Деформация осуществляется также двумя, расположенными симметрично гладкими дисками заданной формы, радиальными силами $f_3(z)$, приложенными к цилиндрической поверхности между дисками $h\leqslant z\leqslant 2l-h$ и нормальными напряжениями, приложенными к торцевым плоскостям $z=0$ и $z=2l$.

В вышеприведенных задачах по обеим торцевым плоскостям задавались напряжения, однако, во всех этих задачах могут быть рассмотрены случаи, когда по обеим торцевым плоскостям или по одной приложены гладкие жесткие штампы.

Институт механики
Академии наук Армянской ССР

Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

Առանցքասիմետրիկ կոնտակտային խնդիր հոծ գլանի համար

Դիտարկվում է վերջավոր գլանի համար առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդիրը, երբ եզրային պայմանները գլանային մակերևույթի ու գլանի հիմքերի վրա տրված են խառը ձևով։ Ենթադրվում է, որ գլանի մակերևույթի վրա շոշափող լարումները բացակայում են։

Խնդրի լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Դինիի շարքերի գումարի տեսքով, որոնց գործակիցները որոշվում են երեք զույգ շարք-հավասարումներից։ Այնուհետև գործակիցների որոշումը բերված է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը։ Ապացուցվում է, որ անվերջ սիստեմները քվազի-լիովին ռեգուլյար են, իսկ ազատ անդամները ձգտում են զրոյի։

Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային լարումների համար անջատված եզակիություններով և կոնտակտից դուրս գտնվող մակերևույթի կետերի տեղափոխումների համար։

Դիտարկված են մի քանի մասնավոր դեպքեր։

ЛИТЕРАТУРА—ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *H. Okubo*, Zeitschr. fur ang. Math. und Mech., vol. 32. № 6. 1952. [2] *П. З. Лифшиц*, «Известия АН СССР» ОТН, № 4, 1955. [3] *В. М. Александров*, «Известия АН СССР», ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1962. [4] *В. М. Александров*, ПММ, т. XXVII, № 5 (1963). [5] *Г. Я. Попов*, «Известия АН Арм. ССР», серия физ-мат наук, т. XVII, № 4 (1964) [6] *А. А. Баблоян, А. П. Мелконян*, «Известия АН Арм. ССР». Механика, т. XXII. № 5 (1969). [7] *А. П. Мелконян*, «Известия АН Арм. ССР», Механика, т. XXIV, №2(1971). [8] *N. Sneddon, R. Y. Tait*, Int. I. Eng. Sci, vol 1, pp. 391—409 Pergamon press, 1963. [9] *Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон* ПММ, том 37, вып. 2, 317--325(1973). [10] *А. А. Баблоян, А. П. Мелконян*, «Известия АН Арм. ССР» Механика, т. XXVI, №5 (1973) [11] *I. C. Cooke, C. I. Tranter*, Journal of Mech. and Appl. Math., vol XII, part 2, August, Oxford., 1959. [12] *R. P. Srivastav* Proc. Roy. Soc. Edinburg (Ser. A), vol 66 pt III, 173—184, 1964. [13] *А. А. Баблоян*, ПММ, т. 31, вып. 4 (1967). [14] *I. N. Sneddon, M. Zowengrub*, Crack problems in the classical Theory of Elasticity., 1969.