ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

LXVI 1978 1

УДК 539.3

МЕХАНИКА

А. Г. Галоян, А. А. Хачатрян

О поперечных колебаниях балок, изготовленных из разномодульного материала

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 15/VIII 1977)

Исходя из уравнения поперечного изгиба балок, изготовленных из разномодульного материала, после необходимых упрощений получено уравнение поперечных колебаний. Решены конкретные примеры с различными краевыми условиями. Определены частоты свободных колебаний, с доведением их до числовых результатов. Показано, что частоты свободных колебаний зависят от степени разномодульности материала и эта зависимость выражается величиной жесткости балки.

Нахождение прогибов при поперечном изгибе балок, изготовленных из разномодульного материала, как известно ([1]), сводится к исследованию уравнений

$$D\frac{d^2w}{dx^2} = -M \pm \eta^2\frac{|Q|h}{4} - \frac{3(8-\eta^2)D}{20bhG_0}q \tag{1}$$

с соответствующим знаком перед вторым членом правой части, зависящим от знака произведения изгибающего момента и перерезывающей силы ($M \cdot Q$), где

$$\eta = \frac{|\sqrt{a_{22}} - \sqrt{a_{11}}|}{\sqrt{a_{22}} + \sqrt{a_{11}}}, \qquad D = \frac{bh^3}{3}(\sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}})^{-2},$$

$$\frac{1}{G_0} = a_{11} + a_{22} - 2a_{12}, \quad a_{11} = 1/E^+, \quad a_{22} = 1/E^-, \quad a_{12} = -\nu^+/E^+ = -\nu^-/E^-. \tag{2}$$

Результаты решения ряда конкретных примеров по изгибу балок показывают, что второй член правой части уравнения (1) дает незначительную поправку (порядка менее одного процента) на величину максимального прогиба. С другой стороны, именно этот член существенно осложняет ход решения конкретных примеров.

Исходя из сказанного выше, заменим уравнение (1) следующим

$$D\frac{d^2w}{dx^2}=-M-\frac{3(8-\eta^2)D}{20\,bhG_0}q, \tag{3}$$

которое дает возможность подойти к вопросу о свободных поперечных колебаниях балок, изготовленных из разномодульного материала.

Продифференцировав обе части уравнения (3) по x и пользуясь известными связями между силовыми факторами

$$\frac{dM}{dx}=Q, \quad \frac{dQ}{dx}=-q \tag{4}$$

представим его в виде

$$D\frac{d^4w}{dx^4}=q-\frac{3(8-\eta^2)D}{20bhG_0}\frac{d^2q}{dx^2}. \tag{5}$$

В этом уравнении заменив q нормальной составляющей сил инерции, приходящей на единицу длины балки

$$q=-\rho bh\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{6}$$

при пренебрежении влиянием тангенциальных составляющих сил инерции и учитывая, что $w=w(x,t)$, получим уравнение свободных колебаний ненагруженной балки

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=-\rho bh\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{3(8-\eta^2)D\rho}{20G_0}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}, \tag{7}$$

где ρ—плотность материала балки.

В уравнении (7) принимая

$$w(x,t)=W(x)\cos\omega t \tag{8}$$

относительно $W(x)$ получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^4W}{dx^4}+\frac{3(8-\eta^2)\rho}{20G_0}\omega^2\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{\rho bh}{D}\omega^2W=0 \tag{9}$$

общее решение которого имеет вид

$$W(x)=C_1e^{\alpha_0x}+C_2e^{-\alpha_0x}+C_3\cos\beta_0x+C_4\sin\beta_0x, \tag{10}$$

где

$$\left.\begin{matrix}\alpha_0\\ \beta_0\end{matrix}\right\}=\left\{\sqrt{\left|\frac{3(8-\eta^2)\rho\omega^2}{40G_0}\right|^2+\frac{\rho bh\omega^2}{D}\mp\frac{3(8-\eta^2)\rho\omega^2}{40G_0}}\right|^{1/2}, \tag{11}$$

а C_i—постоянные интегрирования.

При решении конкретных примеров необходимо иметь также выражения для изгибающего момента и перерезывающей силы, которые в принятых обозначениях имеют вид:

$$M=-D\left[\frac{d^2W}{dx^2}-\frac{3(8-\eta^2)\rho}{20G_0}\omega^2W\right]\cos\omega t, \tag{12}$$

$$Q=-D\left|\frac{d^3W}{dx^3}-\frac{3(8-\eta^2)\rho}{20G_0}\omega^2\frac{dW}{dx}\right|\cos\omega t.$$

Рассмотрим некоторые примеры.

а) Для шарнирно опертой балки граничные условия будут:

$$\text{при}\quad x=0\quad\text{и}\quad x=l\quad W=0,\quad M=0. \tag{13}$$

Удовлетворяя этим граничным условиям, относительно C_i получаем систему однородных уравнений. Приравнивая нулю определитель этой системы, получаем:

$$\sin\beta=0,\quad \beta=\pi n\quad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{14}$$

Отсюда, с учетом (11), для собственных частот свободных колебаний рассматриваемой балки получим:

$$\omega_n=\frac{\pi^2n^2}{l^2}\left[\frac{\rho bh}{D}(1+k\pi^2n^2)\right]^{-1/2}. \tag{15}$$

Здесь и в дальнейшем

$$\alpha=\alpha_0 l,\quad \beta=\beta_0 l,\quad k=\frac{3(8-\eta^2)D}{20G_0bhl^2}. \tag{16}$$

б) В случае консольной балки имеем следующие граничные условия:

$$\text{при}\quad x=0\quad W=0,\quad \frac{dW}{dx}=0,$$

$$\text{при}\quad x=l\quad M=0,\quad Q=0. \tag{17}$$

После удовлетворения граничным условиям (17) и приравнивания нулю определителя получаемой системы однородных уравнений приходим к следующему трансцендентному уравнению:

$$2\operatorname{ch}\alpha\cos\beta+\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)\operatorname{sh}\alpha\sin\beta+\frac{2\beta^2-\alpha^2}{2\alpha^2-\beta^2}+\frac{2\alpha^2-\beta^2}{2\beta^2-\alpha^2}=0. \tag{18}$$

Следует отметить, что между α и β существуют следующие вытекающие из (11) зависимости:

$$\alpha^2\beta^2=\frac{\rho bh}{D}\omega^2l^4,\qquad \alpha=\frac{\beta}{\sqrt{1+k\beta^2}}. \tag{19}$$

Частоты собственных колебаний определяются через корни уравнения (18) следующим образом:

$$\omega_n=\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{D}{\rho bh}}\,\frac{\beta_n^2}{\sqrt{1+k\beta_n^2}}, \tag{20}$$

где β_n — n-ый корень уравнения (18).

в) В случае балки с одним защемленным и другим шарнирно опертым концами имеем следующие граничные условия:

$$\text{при} \quad x=0 \quad W=0, \quad \frac{dW}{dx}=0,$$

$$\text{при} \quad x=l \quad W=0, \quad M=0. \tag{21}$$

Здесь соответствующее трансцендентное уравнение получается в виде

$$\alpha \operatorname{tg} \beta - \beta \operatorname{th} \alpha = 0. \tag{22}$$

В этом случае частоты собственных колебаний определяются по формуле (20), где под β_n понимается n-ый корень уравнения (22).

Отметим, что в последних двух примерах корни уравнений (18) и (22) зависят от параметра k (16), характеризующего влияние поперечных сдвигов. Этот параметр кроме отношения h^2/l^2 зависит также и от степени разномодульности (отношения E^+/E^-) материала. Однако зависимость от последнего весьма слабая, так как при изменении отношения E^+/E^- в достаточно большом интервале $(1 \div 10)$ параметр k изменяется в пределах $(0{,}24 \div 0{,}26)\ h^2/l^2$. Поэтому, если дальнейшие вычисления произвести при $h/l = 1/5$, то можно принять $k=0{,}01$.

В табл. 1 и 2 приведены значения первых пяти корней уравнений (18) и (22), а также соответствующие им величины

$$\omega_n^0 = l^2 \sqrt{\frac{\rho b h}{D}}\, \omega_n.$$

Таблица 1

n	β_n	ω_n^0
1	1,8971	3,5359
2	4,7830	20,6380
3	8,1167	51,1518
4	9,9877	70,5797
5	11,4067	85,7731

Таблица 2

n	β_n	ω_n^0
1	3,9628	14,5993
2	7,1716	41,7948
3	10,3892	74,8518
4	13,6024	109,5949
5	16,8061	144,4271

Из приведенного выше нетрудно заметить, что степень разномодульности весьма мало влияет на величину корней рассмотренных трансцендентных уравнений. Однако частоты собственных колебаний безусловно зависят от степени разномодульности материала и эта зависимость характеризуется величиной жесткости D.

Ереванский политехнический институт
Институт механики Академии наук
Армянской ССР

Ա. Հ. ԳԱԼՈՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

Տարամոդուլ նյութից պատրաստված հեծանների ընդլայնական տատանումների մասին

Հիմնվելով հեղինակների կողմից ստացած տարամոդուլ նյութից պատրաստված հեծանների ծռման հավասարումների վրա և որոշ պարզեցումներ հայվի առնելուց հետո, ստացված է չրեռնավորված հեծանի ազատ տատանումները բնութագրող հավասարումը։ Դիտարկված են տարբեր եզրային պայմանների դեպքեր, բերված են սեփական տատանումների հաճախականության համապատասխան արտահայտությունները, որոնք արտահայտվում են համապատասխան տրանսցենդենտ հավասարման արմատների միջոցով։ Ցույց է տրված, որ նյութի տարամոդուլության ազդեցությունը սեփական տատանումների հաճախականության վրա հիմնականում բնորոշվում է հեծանի կոշտությունը բնութագրող արտահայտության միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. Г. Галоян, А. А. Хачатрян*, ДАН Арм. ССР, т. LXII, № 3 (1976).